

Tableaukalkül und Entscheidbare Formelklassen

Ein Beitrag zum Entscheidungsproblem der Logik

Stephan H. A. Bayerl

Disbui. München

1983

Tableaukalkül und Entscheidbare Formelklassen

Ein Beitrag zum Entscheidungsproblem der Logik

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades

der Philosophische Fakultät

der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt

von

Stephan H. A. Bayerl

aus

Augsburg

München 1988

Referent: Prof. Dr. U. Blau
Korreferenten: Prof. Dr. M. Drömmner
Prof. Dr. G. Link
Tag der mündlichen Prüfung: 25. Juli 1983

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	II
Kap. 1 Einleitung	1
Kap. 2 Stand der Forschung	9
Kap. 3 Herbrandersetzung und Tableauekalkül	23
Kap. 4 Wahrheitsfunktionale Formelklassen und Tableauekalkül	41
Kap. 5 Variablenersetzung und Tableauekalkül	60
Anhänge	71
Bibliographie	86

VORWORT

Das Entscheidungsproblem der Prädikatenlogik 1. Stufe muß nach der Entdeckung ihrer generellen Unentscheidbarkeit (Church 1936, Turing 1937) als Frage nach der Entscheidbarkeit spezieller Formelklassen aufgefaßt werden. Seit Ende der 30-er Jahre wurde der Entscheidbarkeitsstatus einer Vielzahl solcher Formelklassen geklärt, wovon ein eigenes Kapitel (2) handelt. In diesem werden die wichtigsten Resultate, soweit sie bezüglich der syntaktischen Charakterisierung gänzlich oder weitgehend abgeschlossen sind, in einprägsamer Weise gegenübergestellt. Die Methoden, die zu diesen Resultaten führen, sind, obwohl sie auf denselben Prinzipien (Skolemisierung, Herbrandsatz) fußen, sehr unterschiedlich, und im großen und ganzen nicht sehr anschaulich. Dies ist der Hauptgrund, weshalb versucht wird, den Tableauealkül, den viele Logiker als besonders leicht verständlich ansehen, auf seine Brauchbarkeit als Entscheidungsverfahren bez. lösbarer (= entscheidbarer) Formelklassen zu untersuchen.

Wie sich herausstellt, ist der Tableauealkül nur ein spezielles Herbrandverfahren (Kap.3), was zur Folge hat, daß einige Resultate aus dieser Theorie ("Coersetzbarkeit") in rein syntaktische Betrachtungen über einen modifizierten Tableauealkül übertragen werden können (Kap. 4). Diese Modifikationen beruhen u.a. auf ausdrücklich geforderten, überflüssigen Regelanwendungen, die zwar ein langsam arbeitendes Tableau ergeben, aber beweistheoretische Überlegungen grundsätzlich vereinfachen.

Da die Beweise von Kap. 4 nur Formelklassen behandeln, in denen Variablenersetzungen nicht wesentlich eingehen, wird in einem weiteren Kapitel (5) nachgewiesen, daß auch prinzipiell Formelklassen, in denen überdies die Variablenstruktur innerhalb des quantorenfreien Teils der Formel (Matrix) eine Rolle spielt, einer Untersuchung zugänglich sind. Es wird dabei für eine literalbeschränkte Klasse ("few atoms"), die hier 2-atomige genannt wird, ein neuer, rein syntaktischer Beweis erbracht, der gegenüber dem semantischen Beweis in (Dreben & Goldfarb 1979) wesentlich einfacher ist.

In einem gesonderten Teil (Anhang B) wird die Arbeitsweise des verfeinerten systematischen Tableaus erläutert und zudem eine genauere Formulierung der im Haupttext angedeuteten Laufzeitverkürzung des Kalküls gegeben. Diese Ausführungen wären heute durch eine Behandlung verschiedener Unifikations-Algorithmen innerhalb des Tableaukalküls zu ergänzen. Ebenso wie sich manches zu effizienten Implementierungen von Tableauweisern berichten ließe.

Die Beschäftigung mit Theorembeweisen in den letzten Jahren führte zur wiederholt gestellten Frage nach dem NUTZEN des entscheidbarkeitstheoretischen Ansatzes für Inferenzsysteme.

Es ist nicht schwer zu verstehen, warum theoretische Ergebnisse, die die Reduktion von Beweislängen beinhalten, gegenüber Entscheidbarkeitsergebnissen, wie sie hier erwähnt werden, eine bedeutendere Rolle spielen.

Zum einen bietet die Komplexitätsangabe einer entscheidbaren Formelklasse normalerweise keinen Hinweis, wie im konkreten Beweis vorgegangen werden soll, um die Beweislänge (Anzahl der Inferenzen) zu verkürzen. Auf der anderen Seite indiziert die Zugehörigkeit einer Formel zu einer unentscheidbaren Klasse nicht unbedingt einen "schweren" Beweis dieser Formel. -- Was auch gut so ist, denn die meisten interessanten mathematischen Theoreme gehören zu unentscheidbaren Formelklassen.

Neben dem Argument, daß sich aus Entscheidbarkeitsergebnissen keine einfachen Beweisideen deduzieren lassen, spricht gegen einen unmittelbaren Nutzen dieser Ergebnisse folgende, bekannte Überlegung: Werden hinreichend komplexe Formeln, wie sie in mathematischen Kontexten auftreten, in Prädikatenlogik erster Stufe transskribiert, so überschreiten die Komplexitätsschranken, die mit diesen Übersetzungen evtl. gegeben sind, jede, auch in ferner Zukunft verfügbare Speicherkapazität, bzw. jeden, noch in akzeptabler Zeit durchforstbaren Suchraum. Eine optimale Beschränkung der Tiefe (Anzahl der Inferenzen) der nacheinander zu durchlaufenden Zweige im Suchbaum liegt somit zwar im Entscheidbarkeitsfalle für bestimmte Formeltypen vor, kann aber i.A. nicht genutzt werden. Deswegen muß in Beweisalgorithmen die, aus Gründen der Vollständigkeit geforderte, Tiefenbeschränkung mehr oder weniger ad hoc gewählt werden.

Einschränkend sei angemerkt, daß sich viele bereits bestehende Komplexitätsschranken durch geeignete Kodierungen verbessern

lassen sollten. Es ist auch durchaus vorstellbar, daß aus einigen Entscheidbarkeitsbeweisen Modifikationen für den jeweils gewählten Kalkül extrahiert werden können. Warum aber wird in diese Richtung wenig gedacht? Dies liegt, neben den oben erwähnten Gründen, am praktischen Interesse, ganz spezielle Probleme lösen zu wollen, und daran, daß die Korrektheit von Theorembeweisern stets an überschaubaren Beispielen verifiziert werden muß.

Die Beweislänge spezieller Formeln hängt direkt vom verwendeten Kalkül ab. Überspitzt gesagt: Für jede beweisbare Formel läßt sich ein optimaler Beweisalgorithmus spezifizieren. Folgerichtig werden Beweissysteme durch Einführung von Strategien und Heuristiken an ganz spezielle Probleme ("benchmarks") angepasst.

Eine allgemeinere Effizienzsteigerung erreicht man durch Implementierungsdetails (Datenstruktur, Speicherverwaltung) und Gleichläufigkeit (parallele Prozesse). Ferner sind Metabeweise und Benutzerunterstützung zu erwähnen, die sich bereits in existierenden, mathematischen Beweissystemen (Automath, Nuprl) als äußerst erfolgreich erwiesen haben. Und lernfähige Inferenzsysteme scheinen erhebliche Verkürzungen der Beweislänge zu versprechen, z.B. das Erlernen der zu erwartenden Suchtiefe, anhand bereits bewiesener Formeln (als empirisches Pendant zur Entscheidbarkeitstheorie).

So werden bis heute Beweise automatisch generiert, ohne auf Resultate der hier dargestellten Entscheidbarkeitstheorie zurückzugreifen.

Im übrigen läßt sich für die hier vorliegende Untersuchung, neben dem rein theoretischen Interesse, doch ein didaktisches Moment anführen: Die Übertragung von semantischen Ergebnissen aus der Entscheidbarkeitstheorie auf einen Kalkül liefert Resultate, die weder länger, noch, m.E., schwerer verständlich sein müssen als die semantischen Analoga. Ferner kann aus den Beweismustern die Notwendigkeit und Wirksamkeit bestimmter Prozeduren, z.B. Zyklenkontrolle bei Variablenersetzungen, Formelreduktion und Verwendung von Beweisschemata, in einem analytischen Kalkül veranschaulicht werden.

Eine gänzliche Überarbeitung und Erweiterung dieser Untersuchung war geplant, eine völlige Neufassung hätte jedoch mehrerer Monate bedurft, die mir wegen beruflichen Wechsels und anderer Arbeiten nicht zur Verfügung standen, weshalb die Arbeit nun nur geringfügig verändert erscheint.

Mein Dank gilt insbesondere Karl-Heinz Hafner, Monika Weigel, Bertram Fronhöfer und Annette Burdich, die mir bei der Reinschrift und Korrektur des Manuskriptes behilflich waren. Erwähnen möchte ich die guten Arbeitsbedingungen am philosophischen Seminar II (Prof. Stegmüller) der Universität München, und die Mitarbeiter an diesem Lehrstuhl, die mich in meinen Studien förderten, allen voran meinen Doktorvater Ulrich Blau und Matthias Varga v. Kibed.

Kap. 1. Einleitung

Motivation. Das Entscheidungsproblem der mathematischen Logik, speziell das Problem der Entscheidbarkeit von Formelklassen in PL1, enthält zwei interessante Aspekte:

a) Zum einen vermittelt die Kenntnis der Lösbarkeit¹ der nach syntaktischer Verfeinerung abgestuften Formelklassen eine tiefere Einsicht in die Kompliziertheit mathematischer Sätze als dies durch einen intuitiven Vergleich ähnlicher Theoreme möglich ist.

b) Zum anderen liefern die entscheidbaren Formelklassen ein Bindeglied zwischen dem allgemeinen Entscheidungsproblem (Lösbarkeit bestimmter Klassen) und dem speziellen, das nach Gültigkeit (bzw. Erfüllbarkeit) einzelner Sätze fragt (theorem proving).

Der mehr esoterische Aspekt a) enthält, meiner Meinung nach, allerdings keine Offenbarung über denjenigen syntaktischen Minimalteil, der das ganze System unentscheidbar macht, wie das etwa in [Solvable] als möglich angenommen wird.²

1 "Lösbarkeit" und "Entscheidbarkeit" werden im folgenden synonym verwendet.

2 "Is there an informative general criterion that distinguishes those syntactic restrictions that do not lead to solvable classes? We hope our examination of the structural properties of expansions provides the data and tools needed to attack this question, and points to the general concepts in terms of which an answer might be formulated." [Solvable, S.8]

Der kurze Blick auf die bisherigen Ergebnisse (→ Kap. 2) kann auch nicht den Eindruck verstärken, als wäre ein solches allgemeines Kriterium vorhanden.

Jede unentscheidbare Formelklasse hat sich bislang durch Einschränkung der syntaktischen Struktur verkleinern lassen, und allem Anschein nach wird dies nur durch zunehmend schwierigere Beweisverfahren gestoppt.

Beim Aspekt b) (Zusammenhang entscheidbarer Formelklassen - theorem proving) ist das Interesse stärker anwendungsorientiert: Welchen Nutzen besitzen Beweisstrategien der Entscheidbarkeitstheorie bei der Konstruktion möglichst schnell terminierender Beweisverfahren?¹ Seit Beginn der 70'er Jahre werden Kalküle für AL und PL1 geschaffen, die im wesentlichen durch ein noch später zu beschreibendes Verfahren (Herbrandersetzung und Skolemisierung) initiiert wurden. Mit solchen Verfahren, insbesondere dem Resolutionsverfahren², gelang es inzwischen, nichttriviale Theoreme aus unterschiedlichen Gebieten, wie Gruppentheorie, Logik, Kombinatorik u.a., zu beweisen.³

1 So konnte die Entscheidbarkeit einiger (bekannter) Formelklassen mit einem verbesserten Resolutionsverfahren bewiesen werden. [Joyner W.H., 1976]

2 Einführende Werke: [Chang & Lee, 1976] , [Loveland, 1978] und [Robinson, 1979] mit schönem geschichtlichen Überblick.

3 Dazu [Wos, 1981] mit Bibliographie.

Komplexität. Das Entscheidungsproblem läßt sich auch als Komplexitätsproblem verstehen, was sich für den speziellen Teil der entscheidbaren Formelklassen $\mathcal{F}$ in der Gleichwertigkeit der beiden Aufgaben zeigt:

- i) Nachweis der endlichen Erfüllbarkeit jedes F aus $\mathcal{F}$
(Existenz endlicher Modelle).
- ii) Angabe der Maximallänge eines Beweises für F aus $\mathcal{F}$
(Länge: die Anzahl der Substitutionen von Existenzvariablen bzw. der mit diesen Variablen eindeutig korrelierten Terme des endlichen Modells).

Im allgemeinen ist die Beweislänge $f(c,n)$ nicht nur eine Funktion der Ausgangsformel, gegeben durch Struktur und Anzahl n der Atomformeln, sondern auch eine Funktion des verwandten Kalküls c , wie sich durch Vergleich von Beweislängen in Kalkülen mit oder ohne zulässige Regeln zeigen läßt. Da für jedes Kalkül erfahrungsgemäß schwer zu entscheidende Fälle existieren, scheint der Vergleich von verschiedenen Deduktionsverfahren nicht unproblematisch zu sein. Ob für die bekannten PL1-Kalküle untereinander polynomiale Transformationen ausreichen, d.h. gegenüber den exponentiellen Lösungen nicht ins Gewicht fallende Komplexitätsänderungen, ist wohl bislang nur in der Aussagenlogik untersucht worden.¹

¹ siehe [Cook et al, 1979].

ist nämlich k die Anzahl der für einen PL1-Beweis nötigen Substitutionen, unter der eine Formel $\neg F$ unerfüllbar ist, so erhält man als Beweislänge

$$f(k) \leq k \cdot 2^{ku^2},$$

wobei die Länge der Ausgangsformel $|A| = u$ ist.²

Diese Abschätzung vermittelt zunächst nur eine grobe Vorstellung von der Komplexität für Formelklassen, die man auch wegen der vermutlichen¹ oberen Komplexitätsgrenze ($f(k) \leq 2^k$) der Aussagenlogik erwarten würde. Eine genaue Festlegung der Anzahl der Substitutionen k , die durch die zunehmend komplizierter werdende Klassen zu folgenden oberen Abschätzungen. Dabei ist die Anzahl k der sogenannten Herbrandersetzungen das relevante Komplexitätsmaß.

Abkürzungen:

- k: Herbrandersetzung
- p: Anzahl der Prädikatparameter
- m: maximale Stellenzahl der Prädikatparameter
- r: Anzahl der All-Variablen
- s: Anzahl der Existenz-Variablen
- l: Anzahl der vorangehenden x-Variablen
- n: Anzahl der Konjunktionsglieder

1 Zur P*PN - Problematik siehe [Specker, 1976]

2 für die Abschätzung $|A| \leq \log_2 k$ mittels Turingmaschinen mit einseitigem Band siehe [Cook, 1971].

	k
Herbrandklasse	2s
Konjunktive Normalform, wobei keine der Prädikatvariablen mehr als zweimal auftritt	ns
Monadische Klasse	s^p
Ackermann-Klasse $(\forall y \exists x_1 \dots \exists x_s)$	2^{p^2}
Min. Gödel-Kalmar-Schütte $(\forall y_1 \forall y_2 \exists x_1 \cap (0, \infty))$	$2^{(2p)^2}$
Gödel-Kalmar-Schütte $(\forall y_1 \forall y_2 \exists x_1 \dots \exists x_s)$	$2 \cdot 2^{(2p)^m}$
Skolem $\cap$ 	$r! 2^{(pr)^m}$
$(\exists x_1 \dots \exists x_l \forall y_1 \forall y_2 \exists x_1 \dots \exists x_s)$	$(l+1)^2 2^{((l+2)p)^m}$

Wie nicht anders zu erwarten ist, steigt die Komplexität mit Zunahme der syntaktischen Differenzierung. Genauere Abschätzungen finden sich im Anhang A.

Erwähnenswert ist, daß alle diese Klassen reduzierbar sind auf die monadische Klasse¹. Dies läßt den Schluß zu, daß

1 [Solvable, S.172/173 und S.182ff]

durch geeignete Maßnahmen (z.B. zusätzliche zulässige Regelanwendungen) eine wesentliche Erniedrigung der Beweislänge möglich sein sollte. Für den Praktiker sind diese theoretisch entscheidbaren Klassen, auch unter der Vorstellung sehr schneller Rechenmaschinen, faktisch unentscheidbar, weshalb eben die Kenntnis des Konnexes von lösbaren Klassen und terminierenden Verfahren so aussichtsreich scheint.

Der Beitrag dieser Arbeit. Ich entwickle ein erweitertes Tableauealkül, das zwar kein schnell terminierendes Beweisverfahren darstellt, aber ein sehr suggestives und anschauliches beweistheoretisches Werkzeug, dessen Nutzen anhand einiger entscheidbarer Formelklassen aufgezeigt wird.

Im nächsten Kapitel, das einen Überblick der bisher ermittelten lösbaren und unlösbaren Formelklassen repräsentiert, möchte ich zuerst einen gewissen Eindruck von der Bedeutung und dem Ausmaß der Entscheidbarkeitstheorie der Prädikatenlogik 1. Stufe vermitteln.

Kap. 2. Stand der Forschung

Das Entscheidungsproblem EP der Logik fragt, ob es möglich ist, für eine beliebige Formelklasse $\mathcal{F}$ einer Sprache S zu entscheiden, ob eine Formel F aus $\mathcal{F}$ auch Formel einer Teilklasse $\mathcal{D}$ von $\mathcal{F}$ ist oder nicht. Falls S die Prädikatenlogik 1. Stufe (PL1) ist, $\mathcal{F}$ die Menge aller Formeln aus S und $\mathcal{D}$ die Menge der gültigen Formeln bzw. Theoreme von PL1, so bezeichnen wir dieses EP als das klassische Entscheidungsproblem (KEP). Das starke Interesse an KEP vor anderen Entscheidungsproblemen ergibt sich aus der Tatsache, daß zum einen ein nicht geringer Teil der Mathematik ¹ und viele Problemstellungen aus verwandten Gebieten sich in PL1 formalisieren lassen, zum anderen, daß die Ergebnisse bez. des KEP Grenzsteine für die Entscheidbarkeit analoger Formelklassen aus Erweiterungen von PL1 darstellen.

Am Ende der 30er Jahre lag mit der Entscheidbarkeit einer ganzen Reihe von Formelklassen ² die positive Lösung des KEP nahe, wurde jedoch mit der Entdeckung der Unvollständigkeit der PL2 ³ sehr fragwürdig. 1931 konnte dann die Unentscheidbarkeit der PL1 auf zwei verschiedenen Wegen nachgewiesen werden, indem ein unlösbares Problem, das sog. Halteproblem

1 [Barwise, 1977]

2 [Löwenheim, 1915], [Skolem, 1919], [Behmann, 1922], [Bernays & Schönfinkel, 1928] u.a.

3 [Gödel, 1931]

auf die Prädikatenlogik reduziert wurde.¹ Damit ergab sich aber die modifizierte Fragestellung des KEP: Welche (bestimmten) Formelklassen der PL1 sind entscheidbar bez. Gültigkeit (Erfüllbarkeit)?

Methodisch war es naheliegend, mittels eines Codierungsverfahrens das (unlösbare) Halteproblem durch wenige Formeln aus PL1 abzubilden und dadurch eine Formelklasse aus PL1 als unentscheidbar auszuzeichnen.² Andererseits wurde mittels kombinatorischer Überlegungen die Entscheidbarkeit einer ganzen Reihe von Formelklassen auf solche mit einem einfachen Entscheidungsverfahren reduziert. Um den Bereich des Unentscheidbaren stärker einzuschränken, wurden syntaktische Spezialisierungen, sog. Kompliziertheitsklassen, eingeführt. Mittels solcher Spezialisierungen versuchte man möglichst einfach charakterisierte unentscheidbare Formelklassen und möglichst komplizierte entscheidbare Formelklassen zu finden. Die Kompliziertheitsklassen lassen sich dabei in folgende Bereiche unterteilen:³

- a) Berücksichtigung der Quantorenstruktur
- b) Kompliziertheit der logischen Verknüpfungen
- c) Anzahl und Stellenzahl der Prädikatkonstanten
- d) Kompliziertheit der Konnektion der Individuenvariablen untereinander

1 [Church, 1936], [Turing, 1937]

2 [Kahr et al, 1961]

3 Die Auflistung a) - e) ist vollständig im Sinne der Kombinationsmöglichkeiten syntaktischer Zeichen (Buchstaben und Terme) aus PL1.

e) Anzahl der Atom-(Prim-)formeln.

Ferner bei Erweiterung der reinen PL:

f) Anzahl und Stellenzahl von Funktionskonstanten

g) Interpretation der Prädikatkonstanten (Identität, Äquivalenzrelation etc.).

Wir werden im folgenden die bisherigen Ergebnisse unter ausschließlicher Berücksichtigung der stärksten Ergebnisse nach der obigen Klassifikation zusammenfassen.¹ Dabei werden auch Kombinationen aus a)-g) betrachtet. Von einer abgeschlossenen Kompliziertheitsklasse oder einfach von einem abgeschlossenen Ergebnis sprechen wir, falls die endliche Klassifikation in entscheidbare und unentscheidbare Fälle die engstmögliche ist: Jede Formel, die einer der syntaktischen Bedingungen genügt, liegt genau in einer der Teilklassen, die unter der gewählten Bedingung aufgelistet sind und darunterfallende unerfüllbare Teilklassen sind endlich charakterisiert.²

a) Als historisch erste abgeschlossene Lösung gelang die Festlegung des Entscheidbarkeitsstatus von sog. pränexen Formelklassen. Unter pränexer Formel ist hier eine geschlossene Formel ohne Identität und Funktionszeichen zu verstehen, bei der alle Quantoren vor einem quantorenfreien Teil, der sog. Matrix, auftreten: $q_1 \dots q_n A(z_1 \dots z_n)$ mit $q_i \in \{\exists, \forall\} = Q$.

1 Eine historische Darstellung für unentscheidbare Formelklassen findet sich in [Unsolvable], für entscheidbare Formelklassen nicht ganz vollständig in [Solvable].

2 Alle Ergebnisse werden formuliert als entscheidbar (=lösbar) bez. Erfüllbarkeit!

Ein Wort ϕ über Q ($\phi \in Q^*$) heiße Prfixtyp, z.B. $\forall \exists \forall$,
 $\forall^3 = \forall \forall \forall$, $\exists^* = \exists \dots \exists$ ¹. Es besteht eine Halbordnung $\leq$
auf der Menge der Prfixtypen. Und zwar gilt $\phi_1 \leq \phi_2$, falls
 ϕ_2 sich aus ϕ_1 durch Hinzufügen von Quantoren an beliebiger
Stelle von ϕ_1 bilden läßt: $\forall < \exists \forall$, $\forall^2 = \forall \forall < \exists \forall \exists \forall^2$, $\forall \exists \forall <$
 $\exists^3 \forall \exists^2 \forall$, $\exists \forall$ unvergleichbar $\forall \exists$. Jeder Prfixtyp kennzeichnet
eine Formelklasse (Schema, Ausdrucksklasse), d.h. die Menge
aller pränexen Formeln mit ϕ als Prfixtyp. Dann ist

- i) $\left\{ \begin{array}{ll} \phi \leq \exists^n \forall^m & \text{entscheidbar [Bernays \& Schönfinkel} \\ & \text{1928]} \\ \phi \leq \exists^n \forall^2 \exists^m & \text{entscheidbar [Gödel, 1932], [Kalmar,} \\ & \text{1933], [Schütte, 1934] u.a.} \end{array} \right.$
- ii) $\left\{ \begin{array}{ll} \forall \exists \forall \leq \phi & \text{unentscheidbar [Kahr, Moore \& Wang,} \\ & \text{1961] u.a.}^2 \\ \forall^3 \exists \leq \phi & \text{unentscheidbar [Surnyi, 1950]} \end{array} \right.$

Berücksichtigt man, daß jede Formel aus PL1 effektiv in
eine pränexe umgeformt werden kann, so kann man dieses Er-
gebnis als grobe Gesamtklassifikation von PL1 ansehen.

Jede pränexe Formel aus PL1 läßt sich entweder i) oder
ii) zuordnen, weshalb man sagt, daß der Entscheidbarkeits-
status pränexer Formelklassen vollständig gelöst ist.

Durch weitere syntaktische Matrixbedingungen c)-g) lassen
sich aus unentscheidbaren Formelklassen ii) etliche lösbare

1 kurz für: $\exists^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \exists^n$, die Vereinigung aller endlichen
Folgen $\exists_1 \dots \exists_n$.

2 Eine schöne Darstellung dieses klassischen Resultates
findet sich bei [Hermes, 1970], mit wesentlichen Verein-
fachungen in [Hermes, 1971].

abtrennen. Die nächste Kompliziertheitsklasse b) hingegen berücksichtigt nur Matrixeinschränkungen.

b) Jede Formel aus PL1 kann konjunktiv-normalförmig geschrieben werden, d.h. die Matrix einer pränexen Formel besteht aus einer Konjunktionskette, wobei jedes Konjunktionsglied aus einer Adjunktionskette gebildet wird. Als ein für alle Untersuchungen dieses Komplizierheitstyps limitierendes Ergebnis muß ein Resultat von Chang und Keisler angesehen werden, nach dem jede beliebige Formel (aus PL1) in eine konjunktiv-normalförmige mit höchstens drei Adjunktionsgliedern pro Konjunktionsglied umgeformt werden kann.¹ Deshalb werden bei folgender Auflistung nur konjunktiv-normalförmige Formeln mit höchstens zwei Adjunktionsgliedern pro Konjunktionsglied betrachtet. Diese Formeln bilden eine Klasse, die nach dem Erstautor mit (Krom) bezeichnet wird. $\cap$: Durchschnitt zweier syntaktisch charakterisierter Formelklassen. (Her) ("Herbrandklasse") bezeichnet die Matrix, die nur aus Konjunktionsgliedern besteht. Abkürzend für konjunktive Normalform schreiben wir $\Pi(\Sigma)$ (bzw. $\Sigma(\Pi)$ für adjunktive Normalform), mit Einschränkung der Indices, z.B. Π^2 für zwei Konjunktionsglieder.

1 [Chang & Keisler, 1962].

$(\Pi) = (C_1) = (\text{Her})$	lösbar [Herbrand, 1930]
(Σ)	lösbar
$\overset{2}{(\Sigma(\Pi))} = (D_2) = (\text{Or})$	unlösbar [Orevkow, 1968], [Unsolvable, S.176]
$\overset{2}{(\Pi(\Sigma))} = (C_2) = (\text{Krom})$	unlösbar [Krom, 1970]

b)&c) Einschränkung der Matrix durch logische Verknüpfungsbedingung und Einschränkung der Anzahl verschiedenartiger Prädikate.

Abkürzungen: P_i seien verschiedene Prädikat(parameter) in F und $+P_i$ ausschließlich unnegierte (positive) Prädikate. $|P_i|$ die Anzahl des Auftretens jedes einzelnen Prädikates P_i , also $|P_i| \leq 2$: "kein Prädikat tritt öfter als zweimal auf." (Allquantoren und Familienschreibweise für Indices wurden der Übersichtlichkeit halber unterdrückt.)

$\prod_{i=1}^r +P_i \wedge \prod_{i=r+1}^n (\Sigma)$	lösbar [Herbrand, 1931]
$\Pi(\Sigma) \cap (P_i \leq 2)$	lösbar ¹ [Lewis, 1974]
$(P_i \leq 2)$	unlösbar [Lewis, 1974]
$\Pi(\Sigma) \cap (\exists r: P_r =3, P_{i+r} =2)$	unlösbar [Lewis, 1974]

1 Zu dieser Klasse und zwei verwandten siehe auch Kap. 4.

Zusätzlich mit Präfixeinschränkungen bei b): §

	$\forall \exists \forall \quad \cap \quad (\text{Krom})$	entscheidbar [Aanderaa & Lewis, 1973]
	$\exists^* \forall^* \exists^* \quad \cap \quad (\text{Krom})$	entscheidbar ("Maslow-Klasse") [Maslow, 1964], [Solvable]
i)	$\left\{ \begin{array}{l} \exists \forall \exists \forall \quad \cap \quad (\text{Krom}) \\ \forall \exists \exists \forall \quad \cap \quad (\text{Krom}) \\ \forall \exists \forall \forall \quad \cap \quad (\text{Krom}) \\ \forall \exists \forall \forall \quad \cap \quad (\text{Krom}) \end{array} \right.$	unentscheidbar [Aanderaa & Lewis, 1973]
	$\forall \exists \forall \exists^* \quad \cap \quad (\text{Krom})$	?

Weitere syntaktische Einschränkungen sind die sog. Horn-Schemata ¹, konjunktiv-normalförmige Formelmengen, wobei jedes Konjunktionsglied höchstens eine negierte Formel enthält: $(p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_{n-1} \vee \neg p_n) \wedge (q_1 \vee q_2 \vee \dots \vee q_{m-1} \vee \neg q_m) \wedge \dots$.

	$\forall \exists \forall \quad \cap \quad (\text{Horn})$	entscheidbar ² [Goldfarb, 1974], [Solvable, S. 126ff]
i)	$\exists \forall \exists \forall \quad \cap \quad (\text{Horn})$	
	$\forall \exists \exists \forall \quad \cap \quad (\text{Horn})$	unentscheidbar [Aanderaa, 1971],
	$\forall \exists \forall \forall \quad \cap \quad (\text{Horn})$	[Aanderaa & Lewis, 1973]
	$\forall \exists \forall \forall \quad \cap \quad (\text{Horn})$	

1 nach [Horn, 1951]

2 Ebenso eine analoge Klasse, in deren Adjunktionsgliedern höchstens eine unnegierte Prädikatkonstante auftritt.

§ Wir lassen im folgendem die Praefixtyp-Schreibweise fort (entscheidbar: $\leq$; unentscheidbar: $\leq \delta$).

$\forall \exists \forall \exists \cap$ (Horn)

unentscheidbar
[Unsolvable]

$\forall \forall \forall \exists \cap$ (Horn)

Verschärft wird das Ergebnis bez. der Unentscheidbarkeit, wenn die im Präfix sich entsprechenden unentscheidbaren Horn- und Krom-Klassen i) zum Durchschnitt gebracht werden¹. Ferner gelten die Resultate der obigen Klassen nach einem Ergebnis von c) auch für Formeln, in denen höchstens zweistellige Prädikatkonstanten auftreten.

c) Ein weiteres abschließendes Ergebnis wird durch die Einschränkung der Anzahl und der Stellenzahl der in der Matrix auftretenden Prädikatkonstanten erreicht. Als abkürzende Schreibweise führen wir den Begriff "Ähnlichkeitstyp" ("similarity type") anhand eines Beispiels ein²: $(0, \infty, 1)$ bezeichnet die Klasse aller Formeln, in denen kein einstelliges Prädikat, beliebig viele zweistellige Prädikate und ein dreistelliges Prädikat auftreten, aber sonst keine weiteren. $\forall^*$ steht wieder für $\forall \dots \forall$. Dann sind mit Ausnahme der ersten Klasse alle folgenden unentscheidbar:

(∞) [Löwenheim, 1915], [Skolem, 1919]
[Behmann, 1922]

1 siehe [Unsolvable, pp.157-159].

2 Ein Ähnlichkeitstyp ist eine Abbildung $\pi: \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, wobei die Quelle den oberen Stellenindices und der Wertebereich den Anzahlen der Prädikate mit diesem jeweiligen oberen Index entspricht: Eine Formelklasse $\mathcal{F}$ hat dann den Ähnlichkeitstypus π , vorausgesetzt, daß genau $\pi(i)$ i-stellige Prädikatkonstanten in $\mathcal{F}$ vorkommen.

	$(0,1)$	[Kalmár, 1936] ¹
1) {	$\forall \exists \forall \quad n \quad (\infty, 1)$	[Kahr, 1962]
	$\forall \exists \forall \quad n \quad (\infty, 1)$	[Surányi, 1959]
	$\forall^* \exists \quad n \quad (0, 1)$	[Kalmár & Surányi, 1950]
	$\exists^* \forall \exists \quad n \quad (0, 1)$	[Surányi, 1959]
	$\forall \exists \forall^* \quad n \quad (0, 1)$	[Denton, 1963]
	$\forall \forall \exists^* \quad n \quad (0, 1)$	[Kalmár & Surányi, 1947]
	$\forall \exists^* \forall \quad n \quad (0, 1)$	[Kostyko, 1964]
	$\forall \exists \forall^* \exists \quad n \quad (0, 1)$	[Gurevich, 1966a, 1966b]
	$\exists^* \forall \forall \exists \quad n \quad (0, 1)$	[Surányi, 1959]

Die Vollständigkeit von 1) ergibt sich aus dem Umstand, daß eine Erniedrigung des Präfixtyps zu einer entscheidbaren Präfixklasse führt ².

d) Die wohl am schwierigsten zu charakterisierende Entscheidbarkeitsklasse ist die mit Einschränkung der Variablenstruktur. Deshalb erläutern wir unsere Notation anhand eines Beispiels: $(P_{y_1 y_2}, P_{x y_1})$ steht für eine Matrix, in der jede Atomformel nur Prädikate der Gestalt $P_{y_1 y_2}$, $P_{x y_1}$ enthält, also die Allvariable y_1 an erster, die Allvariable y_2 an zweiter, oder die Existenzvar. x an erster und Allvar. y_1 an zweiter Stelle des Prädikats. (P Variable für Prädikat-

1 $(0, \infty)$ unentscheidbar [Löwenheim, 1915];
 $(0, 3)$ unentscheidbar [Herbrand, 1931].

2 Für die unbegrenzten Präfixklassen ist das Ergebnis von Löwenheim et al. eine untere Grenze. Der Nachweis der Vollständigkeit erfordert allerdings eine weitere Diskussion des Ähnlichkeitstypus. [Unsolvability, S.92-93].

buchstaben!) Ferner bezeichnet die Basis b die Menge aller Variablenmengen, die in einer Atomformel einer Matrix auftreten: $M = (Qx_1y_2y_1 \vee Py_2y_2)$, dann $b = (\{x_1y_2y_1\} \{y_2\})$.

- i) $\forall \exists \forall \cap (Py_1y_1, Pxx, Py_2y_2, Py_1x, Py_1y_2, Pxy_2)$ ent-
- ii) $\forall \exists \forall \cap (Py_1y_2, Pxy_2)$ scheid-
- $\forall \exists \forall \cap (Py_1y_2, Py_2x)$ bar ¹.
- $\forall \exists \forall \cap (\{x, y_2\} \notin b \vee \{y_1y_2\} \notin b)$

Das Ergebnis i) umfaßt die Klassen von ii), ist aber nicht endlich kontrollierbar, d.h. es gibt Teilklassen, die nur unendliche Modelle besitzen.

Berücksichtigt man im Fall $\forall \exists \forall$, daß nur 1-stellige und 2-stellige Prädikate auftreten müssen ($\rightarrow c$)), so haben alle Atomformeln nur eine der 12 Gestalten: $Py_1, Py_2, Px, Py_1y_1, Py_1y_2, Py_1x, Py_2y_1, Py_2y_2, Py_2x, Pxy_1, Pxy_2, Pxx$. $\tilde{P}$ sei Variable für eine der 12 Formen, modulo der bereits gewählten. Dann gilt:

- $\forall \exists \forall \cap (Py_1y_2, Py_2x, \tilde{P})$ unentscheidbar ².
- $\forall \exists \forall \cap (Py_2y_1, Pxy_2, \tilde{P})$

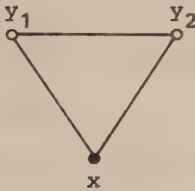
1 [Dreben, Kahr & Wang, 1962], [Solvable, S.120ff].

2 [Kostyko, 1962], [Aanderaa, 1966], [Unsolvable].

M.a.W.: Enthält die Matrix keines der beiden Tripel, so ist das resultierende Schema entscheidbar (siehe oben!), weswegen der Typus von D) ein abgeschlossenes Ergebnis darstellt.

Für Klassen mit $\forall\exists^*$ als Präfix geben wir nur eine entscheidbare an, stellvertretend für vier weitere, die sich nur mittels ausgedehnter Definitionen kennzeichnen lassen.

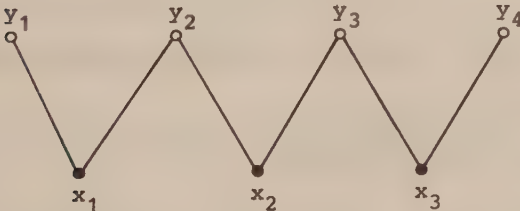
Die Struktur der Variablen wird sehr anschaulich mit Graphen wiedergegeben, z.B. repräsentiert der folgende Graph die Klasse $\forall\exists\forall \cap (0,\infty) (\rightarrow c)$:



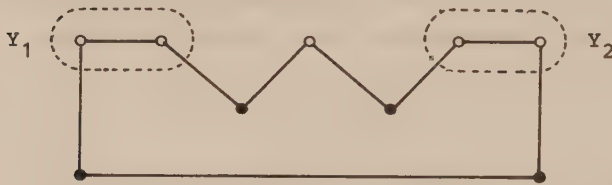
(z.B.: $F = \forall y_1 \exists x \forall y_2 [Pxy_1 \vee Py_2x \rightarrow Py_1y_2]$, $b = \{\{y_1y_2\}, \{y_1x\} \{y_2,x\}\}$)

Kringel für Allvariable
Punkt für Existenzvariable

Je ein Steg mit den beiden Endpunkten charakterisiert also eine Menge aus der Basis b. Das folgende Diagramm



kennzeichne einen strikt alternierenden Pfad, in dem auf jede y-Variable eine x-Variable (und vice versa) folgt. y-Menge aus b sei eine Menge bestehend aus lauter y-Variablen. Zwei y-Variablen heißen erblich verknüpft, falls sie a) identisch sind, oder b) aus verschiedenen Mengen y_1, y_2 , mit $|y_1|, |y_2| > 1$ stammen und ein strikt alternierender Pfad y_1 und y_2 verbindet. Beispiel:



erblich verknüpft



nicht erblich verknüpft



sei eine Abkürzung dafür, daß in einer

Matrix keine erblich verknüpften Variablen vorkommen. Dann ist

$$i) \quad \bigvee_{n \in \mathbb{N}} \bigwedge_{m \in \mathbb{N}} \left(\boxed{\text{Diagram}} \right) \quad \text{entscheidbar}^1,$$

¹ Untersuchungen seit [Skolem, 1928], → Zusammenfassung [Solvable, S.50ff, S.146ff], [Unsolvabel, S.141-155].

und unentscheidbar sind folgende Klassen:

$$\forall \exists^* \wedge \cap \left(\begin{array}{c} \text{Diagram 1: A triangle with two open circles at the bottom vertices and one closed circle at the top vertex.} \\ \text{Diagram 2: A single edge with both endpoints as closed circles.} \end{array} \right)$$

$$\forall \exists^* \wedge \cap \left(\begin{array}{c} \text{Diagram 3: A triangle with two open circles at the bottom vertices and one closed circle at the top vertex.} \\ \text{Diagram 4: A single edge with one open circle and one closed circle endpoint.} \end{array} \right)$$

$$\forall \exists^* \wedge \cap \left(\begin{array}{c} \text{Diagram 5: A path of four open circles connected by three edges.} \\ \text{Diagram 6: A path of four closed circles connected by three edges.} \end{array} \right)$$

(mit Basisbedingungen in Graphenschreibweise).

Bemerkung zu i): Das Ergebnis betrifft insbesondere zyklische Graphen, da sich zeigen läßt, daß alle nichtzyklischen Graphen entscheidbar sind. Ferner wurde stillschweigend

vorausgesetzt, daß die Matrixbedingung  für alle voneinander verschiedenen y -Mengen Y_1, Y_2 erfüllt sein muß.

Bemerkung allgemein: Für den Kompliziertheitstyp d) gibt es noch einige offene Probleme, weshalb von Abgeschlossenheit nicht die Rede sein kann.

e) Formelklassen mit wenigen atomaren Teilformeln sind Klassen, in denen nur endlich viele verschiedene atomare Formeln vorkommen. N_n := Klasse mit n verschiedenen (aber beliebig oft auftretenden) Atomformeln. Z.B.:

$$\forall y_1 \exists x \forall y_2 [(-Py_1 y_2 \vee -Py_2 x) \wedge (Py_1 y_2 \vee Py_2 y_1)] \in N_3.$$

(N_2) entscheidbar
[Goldfarb, 1974]

i)	(N_3)	?
ii) {	$\forall \exists \forall^* \cap (N_4)$	unentscheidbar [Goldfarb, 1974]
	$\forall^* \exists \cap (N_5)$	unentscheidbar [Lewis & Goldfarb, 1973]

i) ist nicht endlich kontrollierbar (siehe obiges Beispiel). Außerdem ist jede Klasse aus ii), die sowohl in der Anzahl der Atomformeln, wie in der Anzahl der Allquantoren beschränkt ist, lösbar [Solvable].

f) In PL1 mit Funktionszeichen gilt unter Berücksichtigung der Ähnlichkeitsschreibweise, also z.B. $\langle 0,1 \rangle$: beliebig viele 1-stellige, aber nur ein 2-stelliges Funktionszeichen.

$(1) \cap \langle \infty \rangle$	entscheidbar	
$\forall^2 \cap (0,1) \cap \langle 1 \rangle$		
$\forall^2 \cap (1) \cap \langle 0,1 \rangle$	unentscheidbar	[Gurevich, 1969]

g) Erweitert man die reine Prädikatenlogik zur PL mit Identität (PLI), so ergibt sich nach Spezifikation des Prefix folgender Status:

$\forall \forall \forall^=$	unentscheidbar
$\forall \exists \forall^=$	unentscheidbar
$\exists \forall^=$	entscheidbar
$\exists \forall \exists^=$	entscheidbar
$\exists \forall^2^=$	?

Im Vergleich mit den reinen Präfixtypklassen haben die ersten drei Klassen denselben Status. Die letzte Klasse ist sehr wahrscheinlich unentscheidbar, da, wie [Goldfarb, 1981] zeigen konnte, es kein primitiv rekursives Entscheidungsverfahren für diese Klasse geben kann.

g)&b) In PLI mit beschränkter aussagenlogischer Struktur gilt

$$(Her) = \text{unentscheidbar} \\ [Wirsing, 1976]$$

Her: Konjunktion von Atomformeln.

f)&g) Für die Komposition der letzten beiden Kompliziertheitsklassen, die sog. Standardklassen (Identität und Funktionsparameter) wurde von [Gurevich, 1976] ein abschließendes Ergebnis ermittelt. Zur Formulierung benutzen wir wieder Ähnlichkeitstyp und eine analoge Schreibweise für Funktionszeichen: ¹ $\langle 1, \infty \rangle$ steht für die Klasse, in der nur ein 1-stelliger und beliebig viele 2-stellige Funktionsparameter auftreten; $\langle all \rangle$ für die Unbeschränktheit bez. der Stellenzahl. Dann gilt für PLIF

$$\begin{aligned} \exists^* n (all) &= n \langle all \rangle & 2 \\ (\infty) &= n \langle 1 \rangle & \text{entscheidbar [Rabin, 1969]} \\ \exists^* \forall \exists^* n (all) &= n \langle 1 \rangle & [\text{Shelah, 1977}] \end{aligned}$$

1 Die Notation weicht von der in [Gurevich, 1976] ab.

2 Die Entscheidbarkeit von $\exists^*$ läßt sich leicht zeigen: Für jede Formel $\exists_1 \dots \exists_n F[x_1, \dots, x_n]$ läßt sich durch sukzessive Ersetzung der n 1-stelligen Funktionszeichen eine Formel angeben, in deren Atomformeln höchsten 1-stellige Funktionszeichen und Identität vorkommen. Eine solche Formel ist in einem Bereich erfüllbar, der um 1 größer ist als die Anzahl der Variablen. [Gurevich, 1976]

$\forall n (0) = n < 2 >$	unentscheidbar [Gurevich, 1976]
$\forall n (0) = n < 0,1 >$	
$\forall n (0,1) = n < 1 >$	

Jede Standardklasse, d.h. jede Formelklasse aus PLIF liegt wenigstens in einer der obigen sechs Klassen.

b)&f)&g) Ein fast abgeschlossenes Resultat kann auch für PLIF mit Beschränkungen der logischen Verknüpfungen angegeben werden: (Her n) bezeichne die Herbrandformeln der Länge n, also n Konjunktionen atomarer Formeln, in PLIF auch Formeln der Gestalt (fa = b).

$\exists^* n (all) n < all >$		
$(all) n < 1 > n (Her \infty)$	[Wirsing, 1976]	entscheidbar
$(all) n < all > n (Her 1)$	[Gladstone, 1966]	
$\forall^6 n (0) n < 0,1 > n (Her 2)$		unentscheidbar
$\forall^3 n (0) n < 0,1 > n (Her 3)$		
$\forall n (0) n < 0,1 > n (Her 4)$	[Wirsing, 1976]	
$\forall n (0) n < 2,0 > n (Her 4)$		

Kap. 3. Herbrandersetzung und Tableaukalkül

Beweise für die Gültigkeit von Formeln werden im Tableaukalkül durch den Nachweis der Unerfüllbarkeit der negierten Formeln erbracht.¹ Eine Formelklasse $\mathcal{F}$ ist entscheidbar, falls für jede Formel F aus $\mathcal{F}$ die maximale Beweislänge festlegbar ist, innerhalb der das Tableauverfahren terminiert, falls $\neg F$ unerfüllbar ist bzw. die Ausgangsformel F gültig. Wir betrachten also im folgenden das zum Entscheidungsproblem bez. Erfüllbarkeit äquivalente Entscheidungsproblem bez. Gültigkeit. Eine bez. Erfüllbarkeit unentscheidbare Formelklasse (z.B. " $\forall\exists\forall$ ") steht einer bez. Gültigkeit unentscheidbaren, dieser Formelklasse konversen gegenüber (" $\exists\forall\exists$ ").

Der Entscheidbarkeitsstatus einiger Klassen läßt sich ohne größere Schwierigkeiten mit der sog. (klassischen) Herbrandersetzungstheorie und noch etwas anschaulicher mittels Tableaukalkül bestimmen. Da das Tableaukalkül im wesentlichen ein spezielles Herbrandverfahren darstellt, werden beide, die Herbrandmethode ausführlich, das Tableauverfahren nur in einer Verfeinerung, hier angeführt.

¹ Eine gewisse Vertrautheit mit dem Smullyanschen Tableaukalkül wird vorausgesetzt. Siehe [Smullyan, 1971].

Herbrandverfahren. Das Herbrandverfahren für PL1, das die Grundlage aller heutigen Entscheidungsprozeduren ¹, resolution method ([Robinson, J.A., 1963 und 1965] u.a.), amenability/amiability-method ([Solvable]), Entscheidungstafeln ([Friedman, 1957]), inverse method ([Maslov, 1964]) ² ist, fußt auf zwei grundlegenden Tatsachen: i) Theorem von Herbrand und ii) Skolemisierung (functional form). Bevor wir darauf näher eingehen, noch einige Definitionen und Festlegungen.

Für den Rest des Textes werden nur parameterfreie ³, geschlossene und rektifizierte Formeln, sog. Schemata aus PL1 (ohne Identität und Kennzeichnung) betrachtet.

Wir schreiben für beliebige Quantoren $qv_1, \dots, qv_r$ häufig einfach $q_1, \dots, q_r$, für zu diesen Quantoren konversen $\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_r$, z.B. $q=\forall$, dann $\bar{q}=\exists$. Außerdem kennzeichnen wir die Negation einer (Teil-) Formel häufig mit $\bar{F}$ anstatt $\neg F$.

Unsere Notation weicht, wie folgt, von der üblichen in PL1 ab: Wir betrachten als Sprache PL1 mit uneigentlichen Funktionssymbolen: in (nichteretzten) quantorenlogischen

1 Davon sind Reduktionsverfahren ausgeschlossen.

2 Die Korrektheit dieses Verfahrens konnte wegen der unklaren Darstellung nicht nachvollzogen werden.

3 Die Parameterfreiheit von F stellt keine Einschränkung dar, weil ja jede (Teil-) Formel $qv_1, \dots, qv_r, F(a_1, \dots, a_n, v_1, \dots, v_r)$ übergeführt werden kann in eine parameterfreie mit n vorangestellten Existenzquantoren. Außerdem ändert sich der Entscheidbarkeitsstatus (bez. Erfüllbarkeit) aller Formelklassen ohne vorangestellte Existenzquantoren beim Übergang in die analogen mit vorangestellten Existenzquantoren nicht für die in diesem Text angesprochenen (endlich erfüllbaren) Klassen. Siehe Solvable, S. 64ff], zur Elimination vorangestellter x-Variablen ebda S.164ff und S.64ff.

Formeln treten keine Funktionssymbole auf. Die Variablen in einer pränexen Formel F werden nach einem Vorschlag von Quine, je nachdem sie von All- oder Existenzvariablen gebunden sind, mit x - oder y -Variable bezeichnet:

$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ Existenzvariablen oder kurz x -Var.
("x-istential")

$y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ Allvariablen oder kurz y -Var.
("you-niversal")

(Ist die Formel nicht pränex, so kann der Status einer Variablen durch Überführung von F in pränexes F geklärt werden.)

Als syntaktische Variable haben wir $v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m, \dots$, als k -stellige Funktionszeichen $f_1^1, f_2^1, \dots, f_1^2, f_2^2, \dots, f_1^n, \dots$. Terme werden induktiv über Variable, Konstanten und iterierte Funktionszeichen definiert:

Term der Höhe 1 : Variable oder Konstante

Term der Höhe $p+1$, $p \geq 1$: $f(t_1, \dots, t_k)$, f k -stelliges Funktionszeichen und $t_1, \dots, t_k$ Terme der Höhe $\geq p$, wobei wenigstens einer die Höhe p besitzt.

Beispiel:

$p=1$ für $f_{x_k}(0) = c_k$,

$p=3$ für $f(f(c_1, c_2))$.

Der quantorenfreie Teil einer pränexen Formel soll Matrix F^M (=Kern) von F heißen. Eine Formel ist rektifiziert, falls keine Variable durch zwei verschiedene Quantorenvorkommnisse gebunden wird. Eine Variable v beherrscht eine Variable w gdw. der Bereich des Quantors von w im Bereich des Quantors von v liegt. Wie oben angedeutet, unterscheiden wir zwei Teilsprachen von PL1F, nämlich PL1F ohne Funktionszeichen das die, auf ihre Entscheidbarkeit zu untersuchenden, Formelklassen enthält, und PL1F mit Funktionszeichen, die nur "quasi-aussagenlogische" Ersetzungen von Formeln der jeweiligen Klassen beinhaltet. Eine Formel der zweiten Sprache enthält nur variablenfreie Terme oder ist aus Formeln solcher variablenfreier Terme mittels logischer Verknüpfungen aufgebaut. Formeln der ersten Art nennen wir atomare Formeln, atomare Formeln ohne (Individuen-) Variable Atome. Formelteile oder Atomformeln einer Formel werden spezifiziert über die Angabe der Länge $c(F)$, die die Anzahl der Vorkommnisse von Atomformeln wiedergibt, und die Ordinalzahl i der Komponente "< >" von F, die die Stellung einer Teilformel in einer (auf -, ^, v reduzierten) Formel angibt:

- i) Für atomare Formeln F: $c(F) = 1, \langle F \rangle_1 = F$
- ii) Für $F = -G, \forall wG, \exists wG$: $c(F) = c(G)$
 $\langle F \rangle_1 = \langle G \rangle_1$, für $1 \leq i \leq c(F)$

iii) Für $F = G_1 \wedge G_2$ oder $G_1 \vee G_2$:

$$c(F) = c(G_1) + c(G_2) \quad \text{und}$$

$$\langle F \rangle_i = \begin{cases} \langle G_1 \rangle_i, & \text{falls } 1 \leq i \leq c(G_1) \\ \langle G_2 \rangle_{i-c(G_1)}, & \text{falls } c(G_1) < i \leq c(G_1) + c(G_2) \end{cases}$$

Unter der funktionalen Form F^* (Skolem-Form) von F verstehen wir das Ergebnis der Ersetzung aller x -Variablen in der Matrix F^M durch Funktionsterme $f_{x_i}(y_1, \dots, y_m)$, wobei $y_1, \dots, y_m$ die Folge von y -Variablen ist, die die jeweilige x -Variable beherrschen. x -Variablen, die nicht beherrscht werden, bildet man auf 0-stellige Funktionszeichen $c_{x_1}, \dots, c_{x_n}$ ab. Das Präfix wird dabei unterdrückt.

Beispiel: $F = \exists x_1 \forall y \exists x_2 [P x_1 y x_2]$

$$F^* = P c_{x_1} y f_{x_2}(y) .$$

Der allgemeine Vorgang dieser Ersetzung heiße Skolemisierung. Alle möglichen variablenfreien Terme f_{x_i} der Höhe p ($\rightarrow$ Termdefinition!), deren Konstanten und Terme in F vorkommen, zusammen mit einem ausgezeichneten konstanten Term $\dagger$ (für frei wählbare y -Ersetzung), bilden das sog. Herbrand-Universum (oder einfach den Grundbereich) $D(F, p)$ der Höhe p eines Schemas F . Z.B.:

$$F = \exists x_1 \forall y_1 \exists x_2 \forall y_2 \exists x_3 [(P x_2 y_2 \vee P x_1 y_1) \wedge (\neg P y_1 y_2 \vee \neg P y_2 x_3)]$$

$$F^* = [(P f_{x_2}(y_1) y_2 \vee P c_{x_1} y_1) \wedge (\neg P y_1 y_2 \vee \neg P y_2 f_{x_3}(y_1, y_2))]$$

$$D(F, 1) = \{4, c_{x_1}\}$$

$$D(F, 2) = \{4, c_{x_1}, f_{x_2}(4), f_{x_2}(c_{x_1}), \\ f_{x_3}(4, 4), f_{x_3}(c_{x_1}, c_{x_1}), f_{x_3}(4, c_{x_1}), f_{x_3}(c_{x_1}, 4)\}$$

. . .

$D(F, \omega)$: Vereinigung aller Universen $D(F, p)$, $p \in \mathbb{N}$.

Über dem Herbrand-Universum definieren wir: Eine Herbrand-Ersetzung H der Ordnung p , $p \geq 1$, ist eine beliebige Ersetzung von F^* über $D(F, p)$, d.h. für $t_1, \dots, t_n \in D(F, p)$:

$H = (y_1 | t_1, \dots, y_n | t_n)$. Man beachte, daß jeder Term aus $D(F, p)$ mit Ausnahme 4 mit einer x -Variablen korreliert ist und keine zwei x -Variablen in einer Herbrand-Ersetzung denselben Term erhalten können. Die endliche Menge aller Herbrand-Ersetzungen von F einer bestimmten Ordnung p , $p \geq 1$, bezeichnen wir mit Expansion $E(F, p)$. Die Vereinigung aller Expansionen $E(F, p)$ sei $E(F, \omega)$. Insbesondere gilt $E(p, p) \subseteq E(F, p+1)$.

Die Einführung von Skolemisierung, Herbrand-Universum und Expansion diente dazu, um in exakter Weise den folgenden, grundlegenden Satz anwenden zu können.

Herbrand-Satz:¹ Sei F eine pränex Formel aus PL1. Dann ist F Theorem gdw. es eine aussagenlogisch gültige Adjunktion von Ersetzungen der Matrix von F gibt.

Wir sparen uns den Beweis und verweisen auf [Shoenfield, 1973, S.54f]. Für gültige Formeln können wir den Satz mit unseren Definitionen etwas ausführlicher schreiben:

Enthält das Präfix von F genau n Existenzquantoren ($n \leq r$), so gilt:

$$\begin{aligned} \models q_1 \dots q_r F^M & \Leftrightarrow \neg(q_1 \dots q_r F^M) \text{ unerfüllbar} \\ & \Leftrightarrow \bar{q}_1 \dots \bar{q}_r \bar{F}^M \text{ unerfüllbar} \\ & \Leftrightarrow \forall y_1 \dots \forall y_{n \leq r} \bar{F}^* \text{ unerfüllbar} \\ & \Leftrightarrow \text{Es gibt ein } m \\ & \quad -H_0 \wedge \dots \wedge -H_{m-1} \text{ unerfüllbar} \end{aligned}$$

Man beachte, daß beim indirekten Beweisverfahren das Herbrand-Universum über der negierten Ausgangsformel gebildet wird: $D(-F, \omega)$ oder $D(\bar{F}, \omega)$, entsprechend $E(\bar{F}, \omega)$.

Die Herbrand-Theorie beschäftigt sich nun eben mit der Frage, wie man von einer gegebenen Formel am schnellsten zu einer gültigen (bzw. unerfüllbaren) Menge von H-Ersetzungen gelangt oder wie man aus der prinzipiell unendlichen Menge von Ersetzungen erkennen kann, ob sie eine unerfüllbare endliche Teilmenge von H-Ersetzungen enthält. Die Untersuchung der Beziehung zwischen Herbrand-Bereich, d.h. Struktur des Grund-

1 [Herbrand, 1930] und [Dreben et al., 1963].

bereiches und den verschiedenen Expansionen mit unterschiedlichen Höhen ist dabei das Wesentliche. Diese Beziehung zwischen $D(F, \omega)$ und $E(F, p)$ der Höhe p kann nur in einem Fall offenkundig sein, dann nämlich, wenn $D(F, \omega)$ endlich ist. Wir erhalten dann auch nur endlich viele H-Ersetzungen, was gleich zur ersten lösbaren Klasse führt:

Verallgemeinerte Bernays-Schönfinkel-Klasse: Klasse aller Schemata F , in der keine x -Variable eine y -Variable beherrscht. (Entscheidbar bez. Gültigkeit)

Aus dieser Klasse erhält man mittels Quantorenregeln die pränexen

Bernays-Schönfinkel-Klasse: Klasse aller Schemata mit Präfix $\forall y_1 \dots \forall y_m \exists x_1 \dots \exists x_n$.

Das Herbrand-Universum dieser Klasse ist endlich:

$D(-F, \omega) = \{c_{x_1}, \dots, c_{x_m}\} = D(-F, 1)$, da überhaupt keine Funktionsterme auftreten. Als H-Ersetzungen kommen nur alle möglichen Kombinationen (mit Wiederholung) über m in Betracht. Ist die Konjunktion $\neg H_0 \wedge \dots \wedge \neg H_s^1$ (über $\forall y_1 \dots \forall y_n \bar{F}^*$) nicht unerfüllbar, so auch keine größere aus den Expansionen $E(F, p > 1)$. (In der Bernays-Schönfinkel-Klasse ist auch die Klasse " $\exists x_1 \dots \exists x_n$ " und die Klasse " $\forall y_1 \dots \forall y_m$ " eingeschlossen.)

Das Problem beim Nachweis der Entscheidbarkeit anderer Formelklassen liegt in der Erzeugung unendlicher Herbrand-Universen. Z.B. erhalten wir bereits bei der einfachen Klasse

1 s : = Anzahl der H-Ersetzungen

von Schemata mit Präfix $\forall$ beliebig tief verschachtelte ("nested"). Funktionsterme in $D(\bar{F}, \omega) = \{4, f(4), f(f(4)), f(f(f(4))), \dots\}$. Über diesem Bereich lassen sich dann auch beliebig viele Herbrand-Ersetzungen bilden.

Betrachten wir eine Expansion $D(\bar{F}, p)$ einer Formel F , so wird ganz allgemein unser Interesse darauf gerichtet sein, ob bestimmte H-Ersetzungen $\langle H_i \rangle_1, \langle H_j \rangle_k$ von Teilformeln $\langle F \rangle_1, \langle F \rangle_k$ von F kontradiktorisch sind und andere H-Ersetzungen, die (Teil-) Formeln erfüllbar machen, nicht vorhanden sind. Paare bis auf Negation identischer Ersetzungen atomarer Teilformeln, nennen wir Co-Ersetzungen¹ - simultane Co-Ersetzungen aber, falls die Coersetzung in einer H-Ersetzung stattfand, also $\langle H_i \rangle_1 =_{co} \langle H_j \rangle_k$ und $i = j$.

Beispiel:	$P_{Y_1} x_1 x_2$	$r \neq s$	}	sim. co-ersetzbar
	$P_{Y_s} x_1 x_2$			
	$P_{Y_1} x_1 x_2 y_2 y_3$		}	co-ersetzbar
	$\neg P_{Y_2} y_2 y_3 y_1 y_2$			
	$\neg P_{X_1} x_2 y_1$		}	nicht co-ersetzbar
	$P_{X_2} y_3 y_2$			

Mittels dieser neuen Begriffe lassen sich nun sofort zwei lösbare Klassen in knapper Weise formulieren.

1 Der analoge Begriff für theorem proving: "unifizierbar".

Klasse der (beschränkt) co-ersetzbaren Formeln: Alle Schemata F , die keine zwei voneinander verschiedenen atomaren Teilformeln enthält, die co-ersetzbar sind. Dann ist die Expansion $E(\bar{F}, 1)$ unerfüllbar, falls F gültig ist.

Beweis: Da nur die Ersetzungen gleicher Teilformeln $\langle \bar{F} \rangle_k$, $\langle \bar{F} \rangle_1$ coersetzbar sind, gibt es eine simultane H-Ersetzung über $D(\bar{F}, 1)$, so daß $\langle H_s \rangle_k = \langle H_s \rangle_1$ für H_s aus der Menge der Expansionen $E(\bar{F}, 1)$, d.h. $s \leq |E(\bar{F}, 1)|$. $\square$

Klasse der simultan co-ersetzbaren Formeln: Klasse aller Skolem-Schemata $(\exists \dots \exists \forall \dots \forall)$, die außerdem noch die Bedingung erfüllen, daß zwei atomare Teilformeln von F nur dann co-ersetzbar sind, wenn sie auch simultan co-ersetzbar sind. Dann ist die Expansion von $E(\bar{F}, 1)$ unerfüllbar, falls F gültig ist.

Beweis: Sind zwei H-Ersetzungen $\langle H_j \rangle_k =_{co} \langle H_i \rangle_1$ co-ersetzbar für mindestens eine H-Ersetzung (j oder i) aus $E(\bar{F}, p > 1)$, dann gibt es nach Voraussetzung eine H-Ersetzung k aus $E(\bar{F}, p > 1)$, so daß $\langle H_k \rangle =_{co} \langle H_k \rangle_1$. Wir müssen noch zeigen, daß H_k bereits Ersetzung aus $E(F, 1)$ ist. Dazu bemerken wir, daß für Skolem-Schemata alle ("Anfangs-") y -Variablen in H-Ersetzungen innerhalb $E(\bar{F}, 1)$ auf den Term 4 abgebildet werden, d.h. alle Terme für y -Variablen sind identisch (= Bedingung §).

Nun können in einer simultanen Herbrand-Ersetzung nur zwei

atomare Formeln (natürlich mit gleichen Prädikaten) aus $\bar{F}^*$ bei Ersetzung kontradiktorisch werden, die

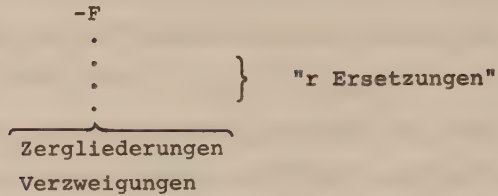
- i) an gleicher Stelle entweder gleiche Terme besitzen
(z.B.: $\neg Py_k^c x_1$ & $Py_k^c x_1$) oder aber
- ii) sich von gleichen Termen nur durch eine andere Indizierung der y-Variablen unterscheiden (z.B.: $\neg Py_1^c x_1$ & $Py_3^c x_1$).

Alle anderen Fälle (z.B.: $\neg Py_1^c x$ & $Py_1 y_1$) sind wegen der Voraussetzung, daß das Präfix "Skolem" ist, ausgeschlossen (x des einen Atoms darf ja bei simultanen Ersetzungen nicht beherrscht sein von dem entsprechenden y im anderen Atom). Die Bedingungen i) und ii) für simultane Ersetzung in irgendwelchen H-Ersetzungen gelten aber wegen Bedingung § trivialerweise für H-Ersetzungen H_s entsprechender Komponenten aus $E(\bar{F}, 1)$, $s \leq |E(\bar{F}, 1)|$. $\square$

Diese wenigen Beispiele dürften einen ausreichenden Eindruck vom Funktionieren der Herbrand-Theorie vermittelt haben.

Zum Tableauealkül. Für die folgenden Beweise setzen wir das Smullyansche Tableauealkül Smullyan, 1971 voraus und definieren noch einige Modifikationen.

Ist T ein Tableau für pränexes $q_1 \dots q_r F^M[v_1, \dots, v_r]$



so bezeichnen wir das Tableau T mit r Parametereinsetzungen und allen möglichen Zergliederungen und Verzweigungen als Ursprungsbaum (UB). Erfolgt die Schließung von T nicht bereits nach r Ersetzungen (= Anz. d. versch. Var. in F^M), so muß an jeden offenen Ast von F eine γ -Formel (evtl. Kopie des ganzen UBes) angehängt werden. Jede n-te solche Ersetzung mit allen ihren Zergliederungen und Verzweigungen soll Wiederholungsbaum-Teil (WB-Teil) (bzw. Wiederholungsbaum (WB)) der n-ten Stufe heißen. UB ist demnach WB der 1-ten Stufe.

Die Beziehung zur Herbrand-Ersetzungs-Theorie kann nun folgendermaßen hergestellt werden: Jede Herbrand-Ersetzung (H) entspricht einem WB bzw. einem WB-Teil ¹. Die H-Ersetzungen der Expansion $E(F, p)$ entsprechen dann einer gewissen Menge von WBen und WB-Teilen, z.B. $E(F, 1)$ dem UB und allen UB-Teilen, die durch "erschöpfend" wiederholte

¹ Je nachdem, ob unter H-Ersetzung bez. einer Formel F eine bestimmte Teilformel von F oder F selbst gemeint ist.

γ -Ersetzungen erzeugt wurden. k-erschöpfend soll die Menge aller Kombinationen von γ -Ersetzungen heißen, die alle x -Parameter subsumiert, die in den WBen bis zur k -ten Stufe auftreten. Der Einfachheit halber legen wir fest, daß an jeden offenen Ast eine "Kopie" des (ganzen) UB angehängt wird - oder anders formuliert, alle γ -Regelanwendungen werden ohne Wiederholungen ausgeführt. Dies verursacht höchstens einige überflüssige δ -Einsetzungen, verlängert also den Beweis, aber verhindert nicht die Schließung des Baumes, falls die Ausgangsformel F gültig ist. WB-Teile im vorigen Sinne treten nun nicht mehr auf, weshalb nun einer erschöpfenden Menge von γ -Ersetzungen eine Menge von WBen gegenübersteht.

So wie indizierte und verschachtelte Terme, d.h. Funktions-terme aus dem Herbranduniversum $D(F, \omega)$, die Verschiedenheit der Ersetzung unterschiedlicher x -Variablen gewährleisten, ebenso regelt im Tableauekalkül die δ -Regel die x -Variablen-ersetzung innerhalb eines WBes und in den WBen untereinander.

Es ist nützlich, von dem Vorhandensein eines systematischen Tableaus ausgehen zu können: die Anwendung der γ -Regel ist festgelegt auf die in alphabetischer Reihenfolge geordneten x -Parameter, die im Tableau in allen Vorfahren einer γ -Formel bereits auftraten, wobei auch beim Vorhandensein mehrerer γ -Formeln in einem WB alle möglichen Kombinationen solcher Ersetzungen in irgendeiner Weise (z.B. Abfolge in lexikalischer Ordnung) gewährleistet sein müssen¹. Ferner setzen wir

1 genaue Definition siehe Anhang B.

i.a. "Abarbeitung" der junktorenlogischen Verknüpfungen von "links nach rechts" voraus.

Wir vereinfachen unsere beweistheoretischen Betrachtungen nochmals, indem wir annehmen, daß auf jeder WB-Stufe des systematischen Tableaus (ST) immer dieselben Parameter-ersetzungen vorgenommen werden (= Stufenvereinbarung)¹. Dies verursacht wieder nur überflüssige WBe. Wir nennen die Menge aller auf einer Stufe ersetzten Parameter dann einen Parametersatz für diese Stufe. Auf Grund der Stufenvereinbarung sind alle WBe einer Stufe identisch², weswegen der laufende Index weggelassen werden kann, und wir für einen WB der k-ten Stufe einfach WB_k schreiben (Stufenindices i.a. untere Indices!).

Ebenso wie für Herbrand-Ersetzungen eine Expansion von Er-setzungen eingeführt wurde, definieren wir für den Tableau-kalkül: $E_T(\bar{F}, p)$ ist die Menge aller WB-Stufen eines systematischen Tableaus für F , in denen für γ -Var. bei γ -Er-setzungen ausschließlich x-Parameter aus den Parametersätzen von WBen der WB-Stufe $\leq p$ vorkommen, also die Menge aller WB-Stufen mit p-erschöpfender γ -Ersetzung. Da in jeder Formel nur endlich viele x-Var. vorkommen, ist auch $E_T(\bar{F}, p)$ für jedes $p \in \mathbb{N}$ endlich und insbesondere

$$E_T(\bar{F}, p) \subseteq E_T(\bar{F}, p+1) .$$

-
- 1 ansonsten nehmen γ -Regelanwendungen jeweils auf die in den "Vorfahren-WBen" auftretenden x-Variablen Bezug.
 - 2 bis auf WBe, deren Zweige teilweise oder sämtlich geschlossen sind. - Es interessieren uns nur die ersetzten Atome, die innerhalb einer Stufe auftreten können und nicht die Länge einzelner WBe.

Bemerkung. Es ist offensichtlich, daß der Komplexitätszuwachs solcher systematischen Tableau-Beweise gegenüber per Hand ermittelten Tableaus ganz erheblich ins Gewicht fällt und geradezu erschreckend hoch ist im Vergleich mit anwendungsorientierten anderen Beweisverfahren. Man kann sich nun überlegen, wie "kurze Beweise" im Tableau gefunden werden können, was ansatzweise im Anhang erläutert wird. Die Verkürzungsstrategie besteht im wesentlichen in der Festlegung der Abfolge von Regelanwendungen in Abhängigkeit von der Struktur der Ausgangsformel ¹. Aber auch die vorgeschlagene Methode verbessert die Praktikabilität unseres Kalküls zu wenig, um einem Vergleich mit Resolutionsverfahren standhalten zu können. Wesentliche Laufzeitverkürzungen von Beweisen im Tableau könnten erzielt werden durch Nichtberücksichtigung bestimmter, für den Nachweis der Unerfüllbarkeit eines Astes nicht notwendiger Teilformeln ². Eine Suche nach Kriterien für das Außerachtlassen bestimmter Tableauabschnitte gestaltet sich freilich nach der Erledigung einiger trivialer Fälle wegen des hohen Komplexitätsgrades möglicher Parameterersetzungen in bereits recht harmlos anmutenden Formeln außerordentlich schwierig. Bemerkung Ende.

1 Ähnliche Strategien werden extensiv in der Resolutionsmethode untersucht.

2 Für ersetzte Atomformeln ist die Auffindung solcher Schnittregeln nicht so problematisch: Einen Eindruck, wie die dazu benötigten Eliminationsregeln aussehen, kann man z.B. beim Studium des Davis-Putnam-Verfahrens [Davis & Putnam, 1960], einem Vorläufer der Resolutionsmethode, erhalten.

Seien $F_1 = q_1 \dots q_r F_1^M$ und $F_2 = q_1 \dots q_r F_2^M$ zwei Formeln der reinen PL mit demselben Präfix $q_1 \dots q_r$ (mit evtl. leeren Quantifizierungen) und konjunktiv-normalförmigen Matrizen $F_1^M = A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n$ und $F_2^M = A'_1 \wedge A'_2 \wedge \dots \wedge A'_m$, $A_1, \dots, A_n$ und $A'_1, \dots, A'_m$ Adjunktionsketten nicht notwendiger Weise voneinander verschiedener atomarer Formeln und $T_1 = T(F_1)$, $T_2 = T(F_2)$. Dann sagen wir, daß ein Tableau T_3 durch die Verschmelzung der beiden Tableaus T_1 und T_2 erzeugt wird [" $T_3 = T_1 \dot{\cup} T_2$ "], falls T_3 aus der auf allen WB-Stufen und allen WBen dieser Stufen wiederholten, sukzessiven Anfügung der Adjunktionsglieder $\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_n$ neben die Adjunktionsglieder $\bar{A}'_1, \dots, \bar{A}'_m$ entsteht, wobei die atomaren Formeln den Stufen entsprechend ersetzt werden.

Unter den geg. Voraussetzungen gilt offensichtlich:

- i) T_3 offen $\Leftrightarrow T_1$ oder T_2 offen
- ii) T_3 geschlossen $\Leftrightarrow T_1$ und T_2 geschlossen.

Wir betrachten später nur den analogen, konjunktiv-normalförmigen Fall: $F_1^M = A_1 \vee \dots \vee A_n$, $F_2^M = A'_1 \vee \dots \vee A'_m$, $T_3 = T_1 \dot{\cup} T_2 \Leftrightarrow T_3$ entsteht aus der ... Anfügung der Verzweigungsglieder $\bar{A}'_1, \dots, \bar{A}'_m$ unter die Verzweigungsglieder $\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_n$, wobei die atomaren Formeln den WB-Stufen gemäß ersetzt werden. - Auch schreiben wir einfach für dieses T_3 unter Nichtberücksichtigung des dynamischen Konstruktionsprozesses: $T_3 = T(F_1^M \vee F_2^M)$.

Die k-Ersetzungen einer Teilformel $\langle F \rangle_i$ in $T^1(\langle F \rangle_i)$, ... $T^k(\langle F \rangle_i)$ wollen wir wegen ihrer gleichen aussagenlogischen Struktur ähnliche Teilformeln (= WB-Teile) von $T(F)$ nennen.

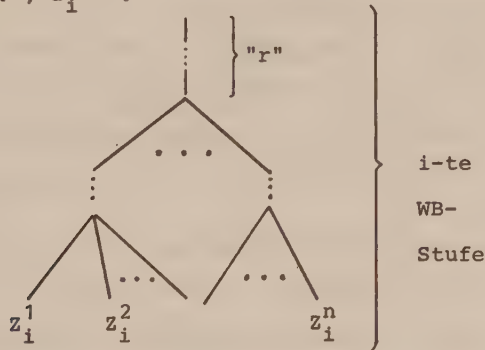
Beispiel:

$$F = \forall x \forall y (A[x] \vee B[y])$$

$$T^1(F) = T^1(\forall x \forall y A[x]) \cup T^1(\forall x \forall y B[y])$$

$T^k(\forall x \forall y A[x]) :$	O.	$\neg \forall x \forall y A[x]$		
$\langle H^1 \rangle_1 :$	I.	$\neg A[a]$	$\llbracket \delta \rrbracket$	} ähnliche Teil- formeln
$\langle H^2 \rangle_1 :$	II.	$\neg A[b]$	$\llbracket \delta \rrbracket$	
$\langle H^3 \rangle_1 :$	III.	$\neg A[c]$	$\llbracket \delta \rrbracket$	
...				

Der Ursprungsbaum und jeder WB WB_i , $i \in \{1, \dots, k-1\}$, eines Tableaus T besteht aus r-Spezialisierungen und sogenannten Zweigen $z_i^1, z_i^2, \dots, z_i^{n_i}$.



Wir sprechen daher von ähnlichen Zweigen verschiedener WB-Stufen, wenn wir Zweige meinen, die denselben oberen WB-Index besitzen.

Analog definieren wir ähnliche Zergliederung, Verzweigung und ähnliche Atome; ähnliche Atome in $T(F)$ von F z.B. sind genau die Ersetzungen einer atomaren Formel aus $-F$. WBe sind, wie oben definiert, immer zueinander ähnlich.

$T' \subset T$ $\Leftrightarrow$ T' kann aus T durch Fortlassen von WB-Teilen bzw. WBen erhalten werden.

Beispiel:

a) T_1 : O. $\neg \forall F^M[x]$ T_2 : O. $\neg \forall F^M[x]$
 I. $\neg F^M[a]$ $\llbracket \delta \rrbracket$ I. $\neg F^M[c]$ $\llbracket \delta \rrbracket$
 II. $\neg F^M[b]$ $\llbracket \delta \rrbracket$
 III. $\neg F^M[c]$ $\llbracket \delta \rrbracket$
 röm. Ziffer: i -ter WB, $i \in \{I, II, III\}$.

$$\Rightarrow T_2 \subset T_1$$

b) Für $F^M = A^M[x] \vee B^M[x]$
 T_3 : O. $\neg \forall A^M[x]$
 I. $\neg A^M[b]$ $\llbracket \delta \rrbracket$

$$\Rightarrow T_3 \subset T_1$$

Kap. 4. Wahrheitsfunktionelle Formelklassen und Tableaukalkül¹

Einige Klassen, die durch ihre aussagenlogische Struktur charakterisiert sind und deshalb in gewisser Hinsicht eine "besondere Nähe" zum Herbrand-Satz besitzen, werden im folgenden als lösbar bewiesen, indem gezeigt wird, daß sie sich unter eine allgemeine Klasse subsumieren lassen. Diese Klasse ist durch das sog. Kompressionslemma gegeben.

Kompressionslemma: Existiert ein geschlossenes nichtsystematisches Tableau $T(F)$, dann auch ein systematisches Tableau $ST(F)$, das spätestens nach k WB-Stufen geschlossen ist, wobei k die maximale Anzahl der WB-Stufen aus $E_T(\bar{F}, p)$ ist und p durch den WB aus $T(F)$ mit maximaler Stufe eindeutig bestimmt ist.

Beweisskizze: Wir nehmen der Einfachheit halber an, daß sowohl für $T(F)$, als auch für $ST(F)$ die Stufenvereinbarung gelte; ohne Stufenvereinbarung müssen wir eine Durchnumerierung aller WBe vornehmen.

Der Parametersatz Ψ des WB mit maximaler WB-Stufe in $T(F)$ ist eine bestimmte Permutation des 1. Parametersatzes Ψ_p^1 einer bestimmten Expansion $E(\bar{F}, p)$ der Ordnung p . Ψ_p^1 läßt sich durch Zurückrechnen eindeutig bestimmen. Aus Ψ_p^1 kann dann p über die Anzahl der x -Parameter und im Präfix von F

¹ Unter wahrheitsfunktionellen Formelklassen verstehen wir Klassen, die sich durch Anzahl und Struktur ihrer aussagenlogischen Verknüpfungen charakterisieren lassen ($\rightarrow$ Kap. 2, Kompliziertheitsklasse b) und $b)\&c)$).

auftretenden x-Variablen errechnet werden und damit die dem Parametersatz Ψ zugehörige WB-Stufe k im systematischen Tableau $ST(F)$. $\square$

Es ist schwierig, die Anzahl von Parametersätzen in verschiedenen Expansionen von Formeln mit beliebigem Präfix in einer kombinatorischen Gleichung festzuhalten. Wir geben ein einfaches Beispiel an, das auch zugleich den ungünstigsten Fall charakterisiert. Sei das Präfix einer Formel F Skolem $(\exists \dots \exists_m \forall \dots \forall_n)$, wobei m die Anzahl der x-Variablen ist, die in der Ausgangsformel n y-Variable beherrschen. Dann ist $|E_T(\bar{F}, p)|$ die Anzahl der Parametersätze Φ_i und ebenso die Anzahl der WB-Stufen in $ST(F)$ für die Höhe p :

p	$ E_T(\bar{F}, p) $	Anzahl der x-Parameter in $E(\bar{F}, p)$
1	1	n
2	n^m	$n^m \cdot n = n^{m+1}$
3	$(n^{m+1})^m$	$(n^{m+1})^m \cdot n$
...	...	...

Die grundlegende Idee beim Aufstellen dieses Lemmas entspringt der Einsicht, daß für bestimmte Formeln mit systematischen, geschlossenen Tableaus sich prinzipiell ein Tableau mit einer beschränkten Anzahl $\leq n$ von WBen angeben läßt.

Wenn nun für jede Formel F aus der Klasse $\mathcal{IF}$ die Existenz eines solchen kurzen Beweises gezeigt werden kann, so haben wir mit Hilfe des Kompressionslemmas bereits die Entscheidbarkeit dieser Klasse nachgewiesen. M.a.W.: Falls die auf Gültigkeit zu untersuchende Formel F aus der Klasse $\mathcal{IF}$ stammt und $\mathcal{IF}$, wie man sagt, "n-kondensierbar" ist, so ist F gültig, falls das systematische Tableau $ST(F)$ innerhalb

Herbrand-Klasse:¹ Klasse aller pränexen Schemata F , deren Matrix eine Adjunktion von atomaren Formeln ist. Die Herbrand-Klasse ist 2-kondensierbar.

Beweis: Angenommen, wir besitzen ein geschlossenes Tableau, das nur aus WBen besteht. Dann ist dieses Tableau einastig und enthält zwei kontradiktorische Atome A und $\neg A$. Zu jeder dieser Formeln läßt sich eindeutig ein WB_i mit einem bestimmten Parametersatz $\forall_i$ zuordnen, WB_A und $WB_{\neg A}$ seien diese WBe. Wir konstruieren dann ein Tableau $T'(F)$, dessen UB einer dieser WBe, z.B. WB_A ist. Falls $T'(F)$ nicht bereits geschlossen ist, wird an den einzigen offenen Ast von UB als einziger weiterer WB $WB_{\neg A}$ angehängt. Das neue Tableau $T'(F)$ muß dann geschlossen sein, da es wie das ursprüngliche einastig ist und die kontradiktorischen Atome A , $\neg A$ enthält. Es folgt 2-Kondensierbarkeit der Klasse. $\square$

Erweiterte Herbrand-Klasse:¹ Klasse aller Schemata F , deren Matrix aus einer Adjunktionskette unnegierter Atomformeln und Konjunktionsketten besteht, wobei jede Konjunktionskette sich aus lauter negierten Atomformeln zusammensetzt und die längste Konjunktionskette maximal n Atomformeln enthält:

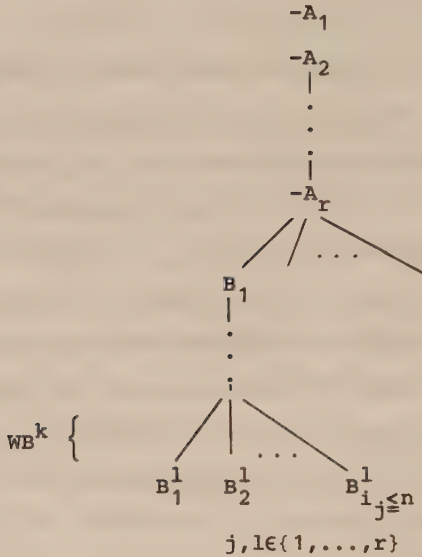
$$F = q \dots q_c [A_1 \vee \dots \vee A_r \vee (\neg B_1^1 \wedge \dots \wedge \neg B_{1 \leq n}^1) \vee \dots \vee (\neg B_1^r \wedge \dots \wedge \neg B_{1 \leq n}^r)]$$

Dann ist jedes F n -kondensierbar.

Beweis: O.E.d.A.: Ein geschlossenes Tableau $T(F)$ endet auf der k -ten WB-Stufe in (mindestens) einem Wiederholungs-

1 [Solvable, Klasse 1.3 und Klasse 1.4]

baum WB^k mit ersetzten Verzweigungsformeln $B_1^1, \dots, B_{i_j \leq n}^1$ als Endknoten.



Also muß es zu jedem B_s^1 , $s \in \{1, \dots, i_j\}$, aus WB^k eine kontradiktorische Zergliederungsformel (alle Verzweigungsformeln unnegiert in $T(F)$!) $-B_s^1 = -A_t$, $t \in \{1, \dots, r\}$, für irgendein t geben. Alle solchen parameterersetzten $-A_t$ liegen jeweils in einem (nicht notwendig voneinander verschiedenen) WB, also in maximal n verschiedenen WBen von $T(F)$. Daraus folgt $(n+1)$ -Kondensierbarkeit für jedes F . $\square$

Lewis-Klasse:¹ Alle pränexen, adjunktiv normalförmigen Formeln F , in deren Matrix F^M kein Prädikatparameter öfter als zweimal auftritt ($|P_i| \leq 2$). Für jedes F gilt: Enthält F^M genau

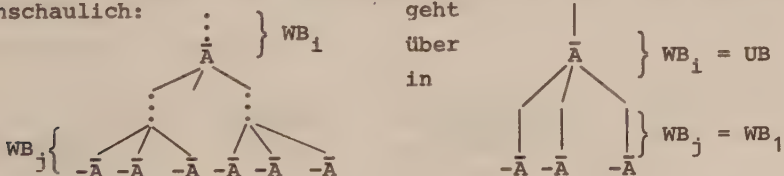
¹ Diese Kennzeichnung wurde von mir eingeführt.

n Adjunktionen und ist F gültig, so gibt es ein geschlossenes Tableau $T'(F)$, das höchstens n WB-Stufen enthält.

Beweis: Durch Induktion nach n. Bei $\underline{n=1}$ besteht F^M nur aus atomaren Konjunktionsgliedern $A_1, \dots, A_r =: D_1$. Es gibt aber keine gültige Formel F mit solcher Matrix ¹ und die Behauptung ist richtig. Die Behauptung gelte für $\underline{n}$ Adjunktionsglieder und F^M enthalte $\underline{n+1}$ Adjunktionsglieder. Da wir voraussetzen können, daß wenigstens ein Prädikat(parameter) negiert und unnegiert in verschiedenen Adjunktionsgliedern D_i, D_j von F vorkommt (andernfalls ist $T(F)$ nicht geschlossen), schreiben wir D_i und D_j als erste Glieder der ganzen Adjunktionskette ausführlich:

$$F^M := (\underbrace{A \wedge B_1 \wedge \dots \wedge B_h}_{R_1}) \vee (\underbrace{\neg A \wedge C_1 \wedge \dots \wedge C_g}_{R_2}) \vee D_3 \vee \dots \vee D_{n+1}$$

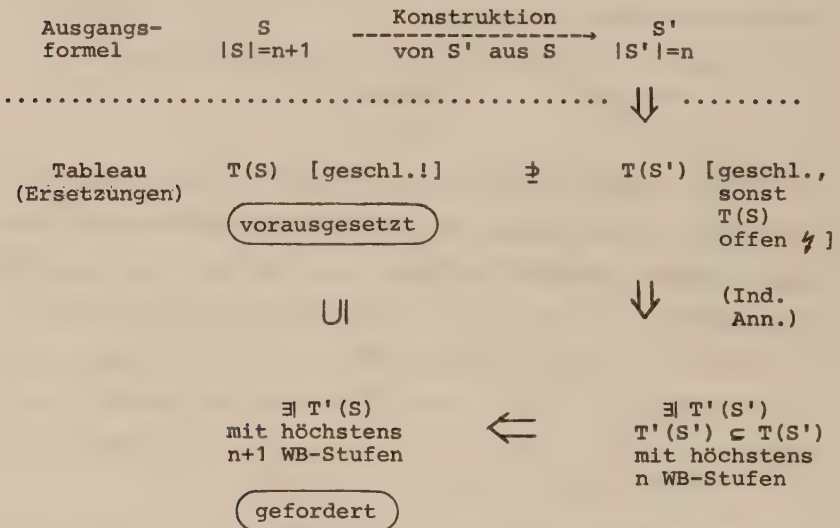
a) Sind R_1 und R_2 nicht vorhanden, dann gibt es entweder ein geschlossenes Tableau mit Ersetzungen von A und $\neg A$, die kontradiktorisch sind, und damit zwei WBe, die $T(F)$ schließen, anschaulich:



1 Beweis: UB von $T(F)$ enthält genauso viele offene Äste wie D_1 Konjunktionen. Für jeden offenen Ast aus UB, d.h. für jeden atomaren Zweig Z_1^i kann der zu Z_1^i ähnliche Zweig Z_2^i im direkten Vorfahr-WB $WB_2(Z_2^i)$ nicht geschlossen werden, der zu Z_2^i ähnliche Zweig Z_3^i nicht im $WB_3(Z_2^i)$, usw. Es gibt also kein geschlossenes Tableau $T(F)$.

oder aber die beiden singulären Adjunktionsglieder A , $\neg A$ sind irrelevant für die Schließung von $T(F)$ und wir können sie mit allen Ersetzungen aus $T(F)$ entfernen. Übrig bleibt das Tableau $T(F' = q \dots q_2 [D_3 v \dots v D_{n+1}])$, das nach Induktionsvoraussetzung (F'^M hat $n-1$ Adjunktionsglieder) auf ein Tableau mit maximal n WB-Stufen kondensierbar ist. In beiden Fällen folgt die Behauptung.

b) Betrachten wir nun den Fall, daß D_1 oder D_2 mehr als ein Konjunktionsglied enthält. Dann können wir die Behauptung mittels der Beweisstrategie ¹, die das folgende Diagramm verdeutlicht, zeigen:



¹ Idee nach Lewis, siehe [Solvable, S.22f].

Wie oben sei

$$D_1 = A \wedge \overbrace{B_1 \wedge \dots \wedge B_h}^{R_1}$$

$$D_2 = -A \wedge \underbrace{C_1 \wedge \dots \wedge C_g}_{R_2}$$

Wir definieren

$$S := D_1 \vee D_2 \vee D_3 \vee \dots \vee D_{n+1} = F^M$$

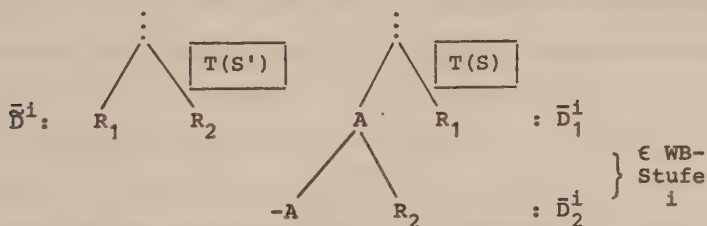
(Wir lassen im folgenden Präfixquantoren fort und schreiben einfach $T(S)$ anstatt $T(q \dots q_x S)$). Wir definieren nun die neue Formel S' :

$$\tilde{D} := B_1 \wedge B_2 \wedge \dots \wedge B_h \wedge C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_g = R_1 \wedge R_2$$

$$S' := \tilde{D} \vee D_3 \vee D_4 \vee \dots \vee D_{n+1} \quad (n \text{ Adjunktionsglieder!})$$

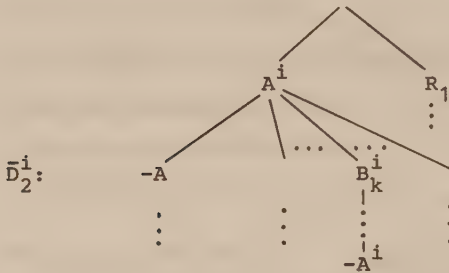
Behauptung: Tableau $T(S')$ ist geschlossen!

Beweis: Falls $T(S')$ nicht geschlossen ist, existiert mindestens ein offener Ast, verursacht durch die Einführung von $\tilde{D}$. Wir betrachten diesen offenen Ast an der Stelle in $T(S')$, an der zum erstenmal das (ersetzte!) $\tilde{D}^1$ auftritt¹ und zum Vergleich den analogen Abschnitt für $\bar{D}_1^1$ und $\bar{D}_2^1$ mit derselben Ersetzung wie $\tilde{D}^1$ in $T(S)$.



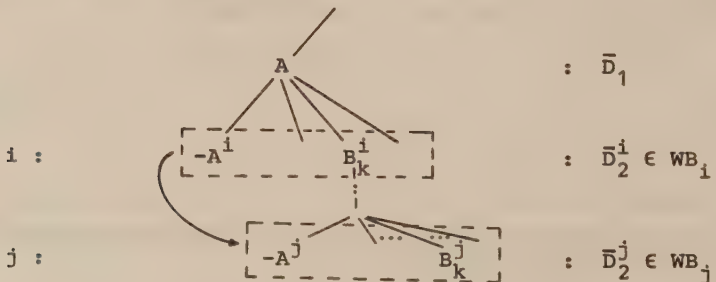
1 Der Stufenindex (hier als oberer Index) kennzeichnet die jeweilige Ersetzung ("WB").

Wir nehmen an, irgendein B_k aus R_2 gehöre zum offenen Ast
(für R_1 gilt eine analoge Überlegung). Der offene Ast "unter"
 B_k aus $T(S')$ ist aber auch offener Ast "unter" B_k aus $T(S)$,
vorausgesetzt, daß B_k^i oder irgendein Nachfolger $N_{B_k}^i$ von B_k^i
($N_{B_k}^i$: ersetzte Atomformel aus der Menge der in S' vorkom-
menden Atomformeln) nicht identisch mit $-A^i$ ist:



Dies gilt aber, da in F^M (und S') nur zwei Vorkommnisse
jedes Prädikates auftreten, und der Parameter A in S' nicht
vorkommt, also $B_k^i \neq -A^i$ und für alle $N_{B_k}^i$ (wie oben)
 $N_{B_k}^i \neq -A^i$.

Bemerkung: Man beachte, daß deshalb jedes weitere "unter"
 B_k^i auftretende, ersetzte $-A^i$ nur einer "Kopie" $\bar{D}_2^j$ von $\bar{D}_2^i$
entstammen kann:



Wenn $T(S')$ einen offenen Ast enthält, dann auch $T(S)$. Widerspruch zur Annahme, daß $T(S)$ geschlossen.

Nun besitzt S' nur n Adjunktionsglieder. Deshalb gilt nach Induktionsvoraussetzung: Es existiert ein geschlossenes Tableau $T'(S')$ mit $\leq n$ WBen.

a) Enthält $T'(S')$ keinen WB-Teil $T(\tilde{D})$, dann schrumpft das Tableau $T'(S')$ auf ein Tableau $T'(D_3 \vee \dots \vee D_{n+1})$ mit $n-1$ WBen, wobei $T'(D_3 \vee \dots \vee D_{n+1}) \subset T(S)$ und $T'(D_3 \vee \dots \vee D_{n+1})$ das gesuchte n -kondensierte Tableau von $T(S)$ ist.

b) Andernfalls $(T'((R_1 \wedge R_2) \vee D_3 \vee \dots \vee D_{n+1}))$ gibt es zu jeder Ersetzung von R_1 eine von A und für jede von R_2 eine von $\neg A$, so daß ein Tableau

$$T'(S) = T((A \wedge R_1) \vee (\neg A \wedge R_2) \vee D_3 \vee \dots \vee D_{n+1})$$

mit höchstens $n+1$ WB-Stufen existiert. $\square$

Wie der vorige Fall zeigt, ermöglicht die Einengung der Matrix auf nur zwei Vorkommnisse eines Prädikatparameters die Lösbarkeit einer Klasse, ohne Prefixbeschränkung zu beweisen. Es liegt nun nahe, durch eine Anzahlbeschränkung der negierten bzw. unnegierten Prädikate ein ähnliches Ergebnis zu erhalten. Dies geschieht am geeignetsten durch eine (weitere) Beschränkung der sog. Horn-Klasse. Eine Matrix F^M heißt Horn (bez. Gültigkeit), falls sie adjunktiv-normalförmig ist und höchstens eine negierte atomare Formel pro Adjunktionsglied enthält.¹

1 Nach [Horn, 1951, Theorem IV].

Beispiel:

P_i : atomare Formel mit Prädikatparameter P_i

$F = q \dots q_r ((-P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge P_4)$

$\vee (-P_2 \wedge P_5)$

$\vee (-P_2 \wedge P_6)$

$\vee (P_7 \wedge P_8)$

$\vee (-P_9)$

$\vee (-P_2 \wedge P_6))$

Für die Untersuchung der nächsten Formelklassen benötigen wir noch einige Begriffe: Ein Tableau $T(F)$ enthält ein Atom A wesentlich, falls A (bzw. $\neg A$) als Kontradiktion (mit $\neg A$ bzw. A) auftritt. Dagegen tritt eine atomare Formel P unwesentlich in $T(F)$ auf, falls keine Ersetzung von P kontradiktorisch zu irgendeiner anderen Ersetzung in $T(F)$ sein kann.

Ist S eine Adjunktionskette $A_1 \vee \dots \vee A_n$ (bzw. Konjunktionskette $K_1 \wedge \dots \wedge K_m$), so schreiben wir für die verkürzte Kette $A_1 \vee \dots \vee A_{r < n}$ von S: $S - \{A_{r+1}, \dots, A_n\}$ (analog für Konjunktionsketten).

Ist P ein unnegiertes (positives) Prädikat einer atomaren Formel bzw. eines Atoms, so bezeichnen wir $\neg P$ als das zu P konverse Prädikat.

Prädikat-eingeschränkte Horn-Klasse I: Klasse aller Schemata F mit Hornmatrix F^M , in der die Anzahl der unnegierten Vorkommnisse eines jeden Prädikatparameters höchstens eins ist. Wenn n die Anzahl der Adjunktionsglieder in S ist, so gibt es ein geschlossenes Tableau $T'(F)$ mit höchstens n WB-Stufen, vorausgesetzt F ist gültig. ¹

Beweis:

O.E.d.A. sollen alle negierten Prädikate in der Matrix $F^M =: S$ als erstes Glied der jeweiligen Konjunktionskette auftreten. Für $q \dots q_r F^M$ schreiben wir wieder einfach S .

Wir nehmen an, daß ein geschlossenes Tableau $T(F)$ für F existiert. Dann kann aber nicht jedes Adjunktionsglied D_i , das ein negiertes Prädikat $-Q_i$ enthält, auch ein unnegiertes P_i , $i \in \{1, \dots, m\}$, enthalten, da sonst $T(S)$ offen wäre: (Indirekt!) Alle Adjunktionsglieder sind dann im Tableau Verzweigungsketten von der Form

$$\bar{D} = \begin{array}{l} \swarrow +Q_i \vee -P_1 \vee \dots \vee -P_m \\ \searrow -R_1 \vee \dots \vee -R_n \end{array}$$

Wir betrachten den Ast, der am weitesten rechts im Tableau $T(S)$ auftritt. Dieser Ast enthält ausschließlich negierte Prädikate und kann deshalb auch keine Kontradiktion enthalten.

¹ Läßt man in der Matrix des obigen Beispiels das letzte Adjunktionsglied fort, so erhält man die Matrix eines Schemas, das unter diese Klasse fällt.

(Andererseits, falls in jedem Adjunktionsglied von S mindestens ein negiertes Prädikat $\neg Q_i$ auftritt, kann das Tableau $T(S)$ ebenfalls nicht geschlossen sein: Der Ast am weitesten links im Tableau $T(S)$ enthält dann nur unnegierte Prädikate und ist ebenfalls nicht geschlossen.)¹ - Es folgt die Existenz von singulären Adjunktionsgliedern $D_1, \dots, D_r$ in S .

Das Prädikat $\neg P_k$ trete in singulären Adjunktionsgliedern $D_{k_1}, \dots, D_{k_l}$ auf ($D_{k_1}, \dots, D_{k_l} \in \{D_1, \dots, D_r\}$).

Wir unterscheiden zwei Fälle:

1) P_k kommt nicht unnegiert in S vor. Dann ist das Tableau $T(S' = S - \{D_{k_1}, \dots, D_{k_l}\})$ geschlossen, da keiner der Äste von $T(S)$ eine Ersetzung von $\bar{D}_{k_1}, \dots, \bar{D}_{k_l}$ wesentlich enthält. (Alle unnegierten Prädikate in S sind ja von P_k verschieden.)

2) P_k tritt unnegiert in einem Adjunktionsglied $D_s = \neg Q \wedge P_1 \wedge \dots \wedge P_k \wedge \dots \wedge P_m$ auf. (Der alternative Fall $D_s = P_1 \wedge \dots \wedge P_k \wedge \dots \wedge P_m$ ist im ersten beinhaltet.)

1 Wir gehen im folgenden von einer Matrix aus, in der jedes Adjunktionsglied D_i eine der drei Gestalten hat und für jede Gestalt auch mindestens ein Adjunktionsglied vorhanden ist:

$$D_i = \begin{cases} \neg Q \\ \neg Q \wedge P_1 \wedge \dots \wedge P_m \\ R_1 \wedge \dots \wedge R_n \end{cases} \text{ bzw. } \bar{D} = \begin{cases} +Q \\ +Q \vee \neg P_1 \vee \dots \vee \neg P_m \\ \neg R_1 \vee \dots \vee \neg R_n \end{cases}$$

$\neg Q$: negiertes Prädikat

P_i, R_j : unnegierte, paarweise voneinander verschiedene Prädikate

$+$: unnegiert

i) D_s enthält nur ein Konjunktionsglied, also nur P_k .

Dann gibt es entweder ein singuläres Adjunktionsglied $D_{k_i} \in \{D_{k_1}, \dots, D_{k_l}\}$ und ein geschlossenes Tableau $T(S)$ mit Zergliederungen $\bar{D}_{k_i}$, $\bar{D}_s$ und eine kontradiktorische Ersetzung von $\bar{D}_{k_i}$ ("P") und $\bar{D}_s$ ("¬P") oder das Tableau $T(S' = S - \{D_{k_1}, \dots, D_{k_l}\})$ ist geschlossen wegen unwesentlichen Auftretens von $\bar{D}_{k_1}, \dots, \bar{D}_{k_l}$. In beiden Fällen gilt die Beh..

ii) D_s enthält mehrere Konjunktionsglieder. Nach bekanntem Muster konstruieren wir eine Matrix S' mit mindestens einem Adjunktionsglied weniger als S :

$$D_s = -Q_s \wedge P_1 \wedge \dots \wedge P_k \wedge \dots \wedge P_m$$

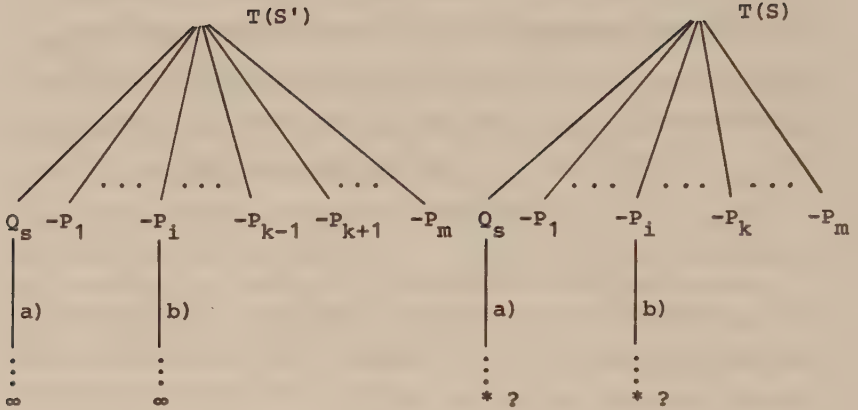
$$D'_s = -Q_s \wedge P_1 \wedge \dots \wedge P_{k-1} \wedge P_{k+1} \wedge \dots \wedge P_m$$

$$S' = (S - \{D_{k_1}, \dots, D_{k_l}, D_s\}) \cup D'_s$$

Angenommen $T(S')$ ist offen. Dann existiert mindestens ein offener Ast, der durch Fortlassen von $\bar{D}_{k_1}, \dots, \bar{D}_{k_l}, \bar{D}_s$ verursacht wurde. Wir betrachten das Baumstück aus $T(S')$, das diesen offenen Ast enthält an der Stelle, an der $\bar{D}'$ zum ersten Mal (ersetzt) auftritt, daneben den Teil aus $T(S)$ mit analoger Ersetzung von $\bar{D}$.

Der offene Ast gehe durch $\bar{P}_i$, $i \in \{1, \dots, k-1, k+1, \dots, m\}$.

(Prädikatbuchstaben bezeichnen sowohl Prädikatparameter wie auch die atomaren Formeln, in denen sie auftreten.)



Der offene Ast in $T(S')$ muß auch offener Ast in $T(S)$ sein, vorausgesetzt, er konnte nicht mit einer Ersetzung eines Konjunktionsgliedes $\bar{D}_{k_1}, \dots, \bar{D}_{k_l}, \bar{D}_s$ des Tableaus geschlossen werden:

a) Q_s kann nicht geschlossen sein mit einer Ersetzung von $\bar{P}_k$, das nach Voraussetzung anderes Prädikat als Q_s ist.

($\bar{D}_{k_1}, \dots, \bar{D}_{k_l}$ alle unnegiert!)

b) Die Ersetzung von $-P_k$ kann nicht mit einer Ersetzung von $-P_i$ geschlossen werden (beide negiert!) und auch nicht mit irgendeiner Ersetzung der singulären $\bar{D}_{k_1}, \dots, \bar{D}_{k_l}$, die alle das gleiche Prädikat, ungleich dem Prädikat $\bar{P}_k$, besitzen.

Demnach ist $T(S)$ offen, falls $T(S')$ offen. Widerspruch.

Nach Induktionsvoraussetzung existiert also ein $T'(S')$ mit n WB-Stufen. Falls nun $T'(S')$ überhaupt keine Ersetzungen

von D_s enthält, so ist $T'(S')$ das gesuchte Tableau. Andernfalls gibt es eine Ersetzung $\bar{A}$ von $\bar{P}$ und eine Ersetzung A eines der $\bar{D}_{k_1}, \dots, \bar{D}_{k_l}$, so daß das Tableau $T'(S) = T'(S')$ $\dot{U} T(D_s \vee D_{k_1} \vee \dots \vee D_{k_l})$ ein Tableau mit höchstens $n+1$ WB-Stufen ist. $\square$

Prädikat-eingeschränkte Horn-Klasse II: Klasse aller Schemata F mit Matrix F^M , in der die Anzahl der negierten Vorkommnisse jedes Prädikatparameters höchstens eins ist. Dann existiert ein geschlossenes Tableau mit weniger als q^n WB-Stufen, wobei n die Anzahl der Adjunktionsglieder in F^M und q die maximale Anzahl der negierten Prädikatparameter ist, falls F gültig ist.

Beweis: Angenommen, es existiert ein geschlossenes Tableau $T(F)$. Dann können wir von dem Vorhandensein mindestens eines singulären Adjunktionsgliedes ausgehen (ansonsten existiert ein Tableau, dessen Ast am weitesten rechts im Tableau offen ist). D_k sei dieses Adjunktionsglied mit Prädikatparameter P_k und $D_{k_1}, \dots, D_{k_l}$ diejenigen Adjunktionsglieder von $S := F^M$, in denen P_k auftritt. Induktion nach n (Anzahl der Adjunktionsglieder von S). $n = 1$: Es gibt keine gültige Formel, deren Matrix nur aus Konjunktionsgliedern besteht, weshalb die Behauptung gilt. ¹

1 Sonst hätte $T(S)$ soviel offene Äste wie Konjunktionsglieder.

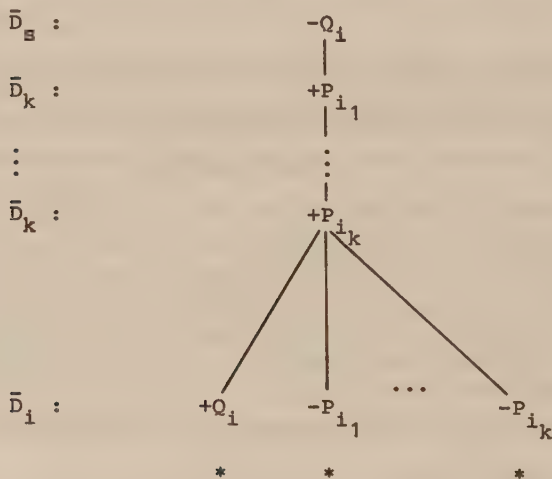
Es gelte also die Behauptung für $\underline{n}$ und die Anzahl der Adjunktionsglieder von F^M sei $\underline{n + 1}$. Dann hat jedes D_i , $i \in \{k_1, \dots, k_1\}$, die Form

$$D_i = -Q_i \wedge R_1 \wedge \dots \wedge R_n \wedge \underbrace{P_{i_1} \wedge \dots \wedge P_{i_m}}_{\text{"P}_k\text{"}}$$

wobei alle P_{i_j} , $j \in \{1, \dots, m\}$, die atomaren Formeln sind, die den Prädikatparameter P_k enthalten¹.

Wir unterscheiden zwei Fälle:

1) Es gibt ein D_i , das überhaupt keine R_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, enthält. Dann gibt es entweder in $T(S)$ zu jeder Ersetzung einer atomaren Formel $-P_{i_j}$ eine Ersetzung von $\bar{D}_k$ und zur Ersetzung von $-Q_i$ eine Ersetzung eines singulären $\bar{D}_s$ mit dem negierten Prädikat von $\bar{Q}_i$, so daß $T(S)$ geschlossen ist.:



¹ Atomare Formeln und das dazugehörige Prädikat werden mit demselben Buchstaben bezeichnet. Der Fall " $D_i = -R_1 \wedge \dots \wedge R_n \wedge P_{i_1} \wedge \dots \wedge P_{i_m}$ " ist im obigen Fall eingeschlossen.

oder $T(S - D_i)$ ist bereits geschlossen. In beiden Fällen gilt die Behauptung.

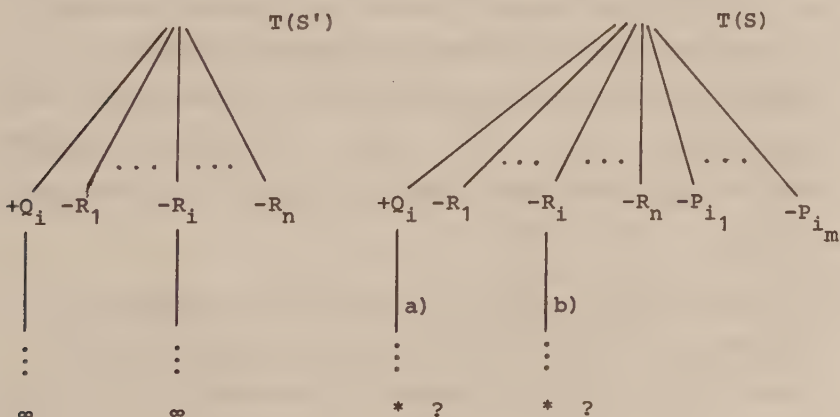
2) Jedes D_i enthält wenigstens eine atomare Formel, in der P_k nicht auftritt. Wir entfernen aus den Adjunktionsgliedern $D_{k_1}, \dots, D_{k_l}$ die Konjunktionsglieder, die P_k enthalten:

$$D_i = -Q_i \wedge R_1 \wedge \dots \wedge R_n \wedge \overbrace{P_{i_1} \wedge \dots \wedge P_{i_m}}^{P_k}$$

$$D'_i = -Q_i \wedge R_1 \wedge \dots \wedge R_n$$

$$S' = (S - \{D_{k_1}, \dots, D_{k_l}\}) \cup \{D'_{k_1}, \dots, D'_{k_l}\}$$

Angenommen, $T(S')$ ist nicht geschlossen, dann existiert ein offener Ast, verursacht durch die Einführung kurzer Adjunktionsglieder $\bar{D}_i \in \{\bar{D}'_{k_1}, \dots, \bar{D}'_{k_l}\}$. Wir betrachten wieder das Baumstück in $T(S)$, an dem zum erstenmal eines der ersetzten $\bar{D}'_i$ auftritt und daneben die analoge Ersetzung mit $\bar{D}_i$ aus $T(S)$:



Der offene Ast von $T(S')$ "unter" Q_i bzw. $\neg R_i$, $i \in \{1, \dots, n\}$, ist aber auch offener Ast von $T(S)$, vorausgesetzt er konnte nicht mit einer Ersetzung von $\bar{D}_k$ oder eines der $\bar{D}_i$ geschlossen werden:

a) Keine Ersetzung von Q_i kann eine Kontradiktion zu irgendeiner Ersetzung von atomaren Formeln sein, die $\neg P_k$ enthalten, da Q_i nach Voraussetzung ein anderes Prädikat als D_k (" P_k ") enthält.

b) Keine Ersetzung von R_i kann Kontradiktion zu einer Ersetzung von $+Q_i$ sein (kein R_i enthält nach Definition von D'_i P_k).

Also ist mit $T(S)$ auch $T(S')$ geschlossen und es existiert nach Induktionsvoraussetzung ein geschlossenes Tableau $T'(S')$, das $< p^n$ WB-Stufen enthält.

Falls nun $T'(S')$ keine Ersetzungen von $D'_{k_1}, \dots, D'_{k_1}$ besitzt, so ist $T'(S')$ das gesuchte Tableau. Andernfalls erhalten wir ein Tableau $T'(S)$, indem wir zu jeder Ersetzung eines Konjunktionsgliedes $\bar{D}'_i$ in $T'(S')$ die Ersetzungen der atomaren Formeln $\neg P_{i_1}, \dots, \neg P_{i_m}$ aus $\bar{D}_i$ als Verzweigungen und als Zergliederungsformeln dieselben (unnegierten) Ersetzungen $P_{i_1}, \dots, P_{i_m}$ hinzufügen.

In jedem Adjunktionsglied D_i können nach Voraussetzung höchstens q Vorkommnisse des Prädikatparameters P_k auftreten. In $T'(S')$ gibt es maximal q^n WB-Stufen, d.h. q^n

Ersetzungen jedes einzelnen $\bar{D}_1$, weswegen wir höchstens $q^n \cdot q = q^{n+1}$ Ersetzungen (d.h. Atome, die P_k enthalten) zu berücksichtigen brauchen. - Es folgt q^n -Kondensierbarkeit von $T(S)$. $\square$

Zusammenfassung: Um die Lösbarkeit einer Formelklasse $\mathbb{F}$ zu beweisen, genügt es (unter der Annahme, ein vorgegebenes Tableau sei geschlossen) zu zeigen, daß für ein repräsentatives Schema F der Klasse $\mathbb{F}$ ein kürzeres Tableau mit einer bestimmten Anzahl n von WBen existiert, d.h. $\mathbb{F}$ n -kondensierbar ist. Wir erhalten dann nämlich (nach Kompressionslemma) die maximale WB-Stufe im systematischen Tableau $ST(F)$, innerhalb der jeder T-Beweis für gültiges F abbrechen muß.

Für drei Klassen, die durch alleinige Beschränkung der aussagenlogischen Verknüpfung der Matrix charakterisiert sind, ließ sich die n -Kondensierbarkeit zeigen. Die Beweise wurden mittels Tableaurekalkül rein syntaktisch durchgeführt.

Kap. 5 Variablenersetzung und Tableaukalkül

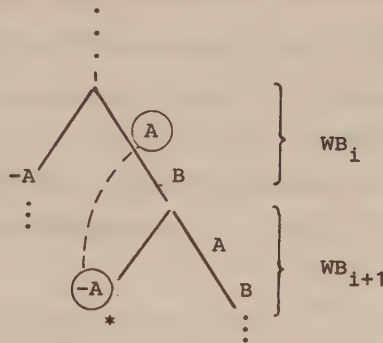
Alle Beweise von Kap. 4 berücksichtigen nicht das Zusammenspiel verschiedener Substitutionen im Tableau, sondern nur die logischen Verknüpfungen und die Anzahl von negierten und unnegierten Prädikatparametern der Ausgangsformel. Es verwundert deswegen nicht, daß Tableaus, die ja genaue zweidimensionale Abbildungen der ihnen zu Grunde liegenden Formel darstellen, ein vortreffliches beweistheoretisches Werkzeug für diese Art von Beweisen sind. Aber auch Beweise zur Entscheidbarkeit von Formelklassen mit anderen Beschränkungen als aussagenlogischen, lassen sich prinzipiell mittels Tableauverfahren bewerkstelligen. Als Beispiel geben wir einen neuen, rein syntaktischen Beweis für die Lösbarkeit der Formelklasse (N_2) .¹ Diese Formelklasse nimmt eine gewisse Zwischenstellung ein: Einerseits impliziert die geringe Anzahl atomarer Formeln eine überschaubare logische Verknüpfungsstruktur und ermöglicht dadurch erst den Nachweis der Lösbarkeit, auf der anderen Seite spielt für den Nachweis eine große Rolle, daß bestimmte Ersetzungen nicht auftreten.

Wir vereinfachen zunächst unsere Sprechweise durch einige Definitionen. Falls ein Wiederholungsbaum WB_k^i eines systematischen Tableaus $ST(F)$ Endbaum ist, und alle wesentlichen Formeln, d.h. zu anderen Atomen kontradiktorische Atome der Äste von WB_k^i in WB_k^i selbst auftreten, so sprechen wir in

1 siehe auch Kap.2: e). Und ferner [Solvable, S.192-194]

Analogie zur Notation der Herbrandersetzung von einer simultanen Schließung. Ein Ast ist simultan geschlossen, falls alle wesentlichen Formeln im letzten Zweig dieses Astes vorkommen. Liegen die wesentlichen Atome in zwei nicht zueinander ähnlichen Zweigen, nennen wir dies Kreuzschließung. Z.B.

$$F^M = A \wedge (-A \vee -B)$$



2-atomige Klasse: Klasse aller pränexen Schemata F , in deren Matrix nur zwei verschiedene atomare Formeln A, B auftreten. Ist F gültig, dann ist $ST(F)$ auf der UB-Stufe geschlossen oder 2-kondensierbar.

Bemerkung. Jedes pränexe Äquivalent eines Schemas mit nur zwei verschiedenen atomaren Formeln enthält nur diese Formeln.

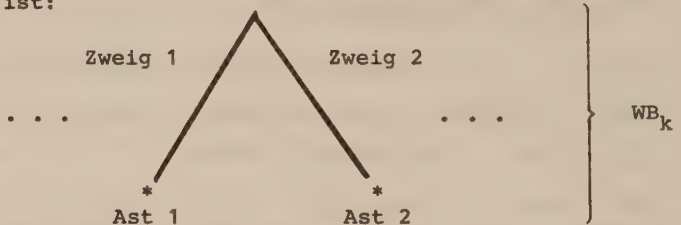
Beweis: O.E.d.A. sei F^M konjunktiv-normalförmig mit einer beliebigen Anzahl von Konjunktionsgliedern $A \vee B, -A \vee -B, -A \vee B, A \vee -B$. Für den Fall $F^M = A \vee -A$ (bzw. $B \vee -B$) gilt die Behauptung trivialerweise und in der Kombination mit anderen Konjunktionsgliedern K ($:(A \vee -A) \wedge K$) ist $A \vee -A$ für die

Schließung des Tableaus irrelevant. Angenommen F ist gültig, dann ist das systematische Tableau $ST(F)$ geschlossen und die atomaren Formeln A, B besitzen gleiche Prädikatparameter (Ausnahme: Fall 2/ii)

1.Fall: Die Matrix F^M enthält ein Konjunktionsglied $A \vee B$ (oder $\neg A \vee \neg B$). Dann existiert kein geschlossenes Tableau $ST(F)$: O.E.d.A. sei $A \vee B$ (bzw. $\neg A \vee \neg B$) erstes Konj.glied, dann enthält der am äußersten links befindliche Ast in $ST(F)$ nur negierte (bzw. unnegierte) Atome und ist deswegen nicht geschlossen.

2.Fall. α) Entweder ist $F^M = \neg A \vee B$ oder $F^M = A \vee \neg B$. Dann ist $ST(F)$, weil F Schema der Herbrandklasse, 2-kondensierbar ($\rightarrow$ S.43).

β) F^M enthält mehrere Konjunktionsglieder $\neg A \vee B$, $\neg B \vee A$. O.E.d.A. können wir uns auf $F^M = (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$ beschränken. Die Ersetzungen von $Z^1 := \neg A \vee B$ ($Z^2 := \neg B \vee A$) sind dann ähnliche Zweige $Z_1^1, \dots, Z_n^1, \dots$ ($Z_1^2, \dots, Z_1^2, \dots$). Wir betrachten den einen WB_k , der auf der k -ten WB-Stufe geschlossen ist:



Dann liegt entweder eine

1) simultane Schließung

oder eine nicht-simultane

ii) Kreuzschließung

iii) Schließung ähnlicher Äste mit Endknoten $A, -A$

iv) Schließung ähnlicher Äste mit Endknoten A, B .

Wir zeigen, daß eine simultane Schließung in $ST(F)$ wenn überhaupt, dann auf der UB-Stufe auftritt, und daß nicht-simultane Schließungen, die auf einer WB-Stufe k , $k > 1$, erfolgen sollen, die Schließung von $ST(F)$ auf der UB-Stufe nach sich ziehen.

Zunächst aber führen wir noch eine Festlegung ein:

Variablen v, w mit gleichem Stellenindex k im Prädikat P nennen wir miteinander verknüpft:

$$\begin{array}{c} k \\ | \\ A = P \dots, v, \dots \\ B = P \dots, w, \dots \end{array}$$

Die Möglichkeit einer kontradiktorischen Ersetzung von A und B hängt offensichtlich nicht nur von der Art der Variablen v, w ab, sondern auch von anderen Variablen-vorkommnissen in A bzw. B :

$$\begin{array}{ll} A = P \dots, x_1, \dots, x_2, \dots & x: x\text{-Variable} \\ B = P \dots, y, \dots, y, \dots & y: y\text{-Variable} \end{array}$$

In diesem Fall verhindert das zweifache Auftreten von y in Verknüpfung mit x -Variablen x_1 und x_2 eine für alle Stellen in A und B übereinstimmende Ersetzung. Besteht eine derartige Konnexion einer Variable v , wegen

einer Verknüpfung zu anderen Variablen, die selbst wieder verknüpft sind mit anderen Variablen, die auch wieder verknüpft sind usw. , bis zu einer Verknüpfung mit der Variable w ,

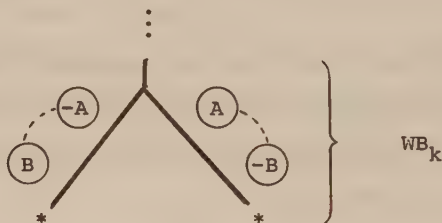
z.B.
$$\begin{array}{l} P \dots, v, \dots, z, \dots, z \\ P \dots, v, \dots, v, \dots, w \end{array}$$

so sagen wir, v und w stehen im transitiven Abschluß der Verknüpfungsrelation.¹

Der folgende Beweis berücksichtigt teilweise nur die "einfache" Verknüpfung zweier Variablen, soweit für "v ist mit w verknüpft" auch "v steht im transitiven Abschluß der Verknüpfungsrelation zu w" gelesen werden kann. Die Argumentation bleibt auf jeden Fall die gleiche.

.

1) Simultane Schließung:



Die Atome $(-)A$, $(-)B$ können dann nicht durch zwei Ersetzungsarten entstanden sein:

a) durch Ersetzung von verknüpften identischen x-Variablen

$$\begin{array}{l} P \dots, x_1, \dots \\ P \dots, x_s, \dots \end{array}$$

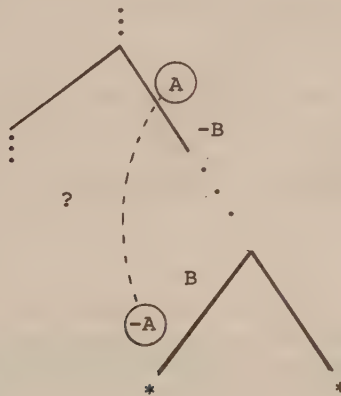
denn falls $1 = s$, so müssen nach δ -Regel für x_1 und x_s zwei verschiedene Parameter ersetzt werden. Widerspruch zur Annahme, daß WB_k geschlossen.

b) durch Ersetzung von verknüpften Variablen x und y , wobei x in $\bar{F}$ von y beherrscht wird (bzw. von Variablen x, y , x im transitiven Abschluß der Verknüpfungsrelation zu y und y beherrscht x).

Denn dann würde der x -Parameter in jedem WB_i vom y verschieden sein, wieder im Widerspruch zur Annahme, daß WB_i geschlossen.

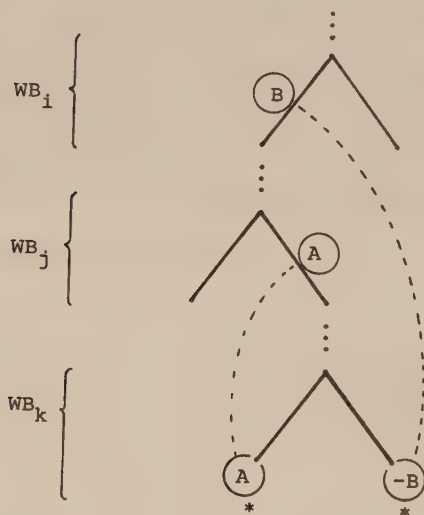
Es folgt mit a) und b), daß eine simultane Schließung überhaupt nur auf der UB-Stufe von $ST(F)$ auftreten kann: Denn gerade mit dem ersten Parametersatz von $ST(F)$ wurden die mit x verknüpften y -Parameter auf den jeweiligen x -Parameter spezialisiert und alle anderen y -Variablen auf den ersten in $ST(F)$ auftretenden x -Parameter.

ii) Kreuzschließung:

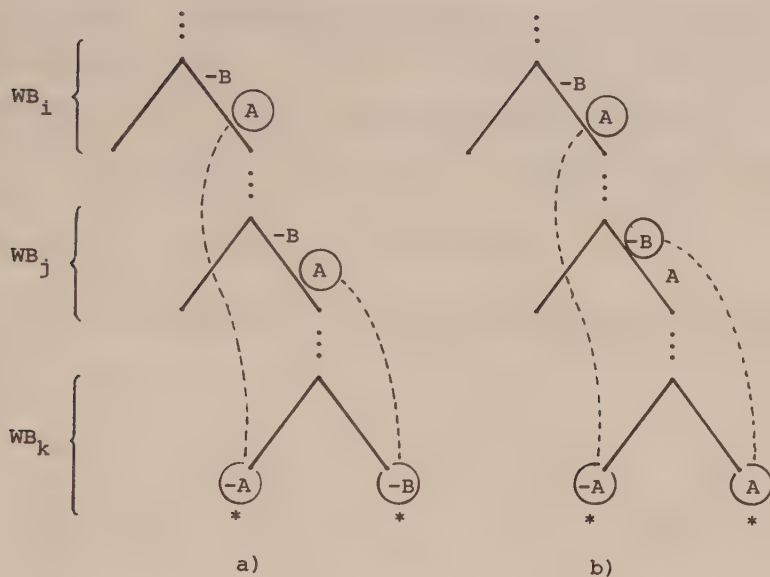


Eine Kreuzschließung ist nur möglich, falls die atomare Formel von $(-A)$ keine x -Variable enthält. Andernfalls

wären A aus WB_i und $\neg A$ aus WB_j im Widerspruch zur Voraussetzung wegen unterschiedlicher x -Parameter nicht kontradiktorisch. Demnach treten in der atomaren Formel von $(-)A$ nur y -Variablen auf. Dieselbe Aussage gilt auch für $(-)B$, weshalb in F nur y -Variablen vorkommen, und $ST(F)$ bereits auf UB-Stufe geschlossen wäre.



Bemerkung. Eine Kombination von Kreuzschließung und Schließung ähnlicher Äste auf einer WB -Stufe $k, k > 1$ kann ebenfalls nicht auftreten. Wir unterscheiden zwei mögliche Fälle:



(-)A enthält nur y-Variable, ansonsten keine Schließung möglich!

a) dann kann $-B$ keine x-Variable enthalten, da sonst WB_k nicht geschlossen sein kann.

b) dann kann $-B$ wiederum kein x-Variable enthalten, denn:

$WB_1: \quad A = P \dots, a, \dots$

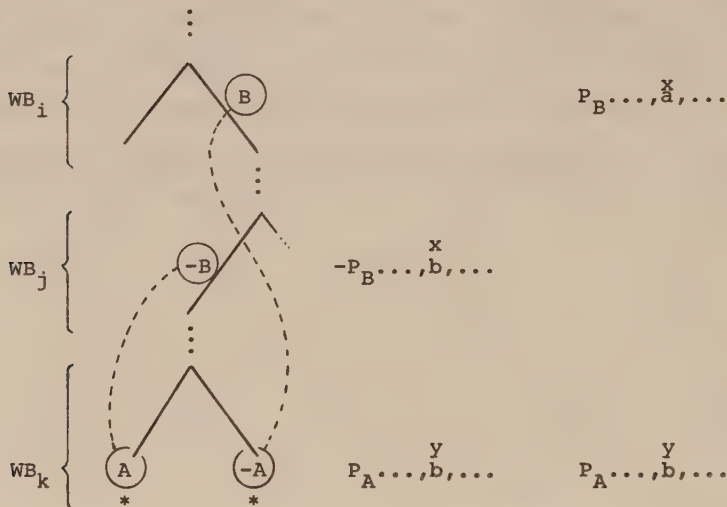
$WB_j: \quad \quad \quad -B = P \dots, b, \dots$

$WB_k: \quad -A = P \dots, a, \dots \quad \quad A = P \dots, a, \dots$

und rechtsseitiger Ast ist nicht geschlossen.

Bemerkung Ende.

iii) Nicht-simultane Schließung mit Endknoten $A, \neg A$:

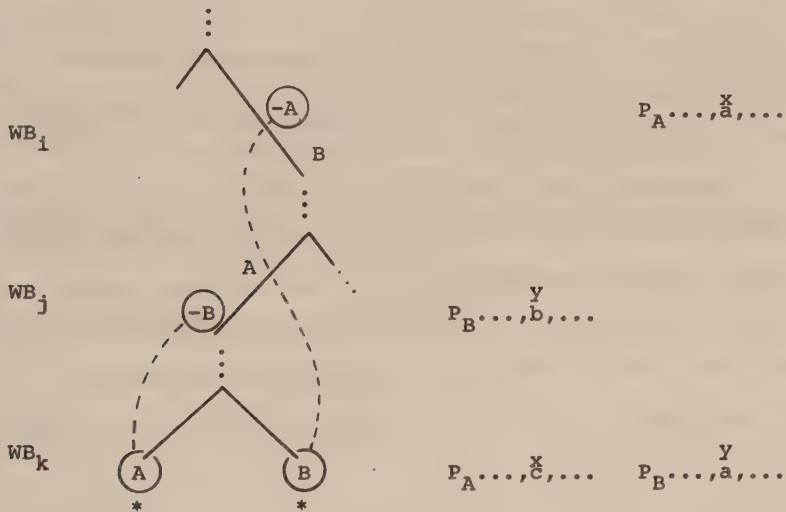


Wir können davon ausgehen, daß sowohl die atomare Formel von $(-)A$ wie die atomare Formel von $(-)B$ nicht ausschließlich y -Parameter enthalten, und mindestens eine y -Variable aus einer der beiden Formel existiert, die mit einer x -Variable verknüpft ist oder im transitiven Abschluß der Verknüpfungsrelation zu einer x -Variablen steht (= Bedingung §).

Angenommen $(-)B$ enthalte an k -ter Stelle einen x -Parameter. Dann enthält $\neg B$ aus WB_j an k -ter Stelle einen neuen Parameter b . Atom A müßte dann an k -ter Stelle einmal a und einmal b als Parameter enthalten. Widerspruch.

Angenommen A enthalte x-Parameter. Dann kann WB_k nicht geschlossen sein, da im $S(T)$ in jedem WB_r alle x-Variable durch gänzlich neue x-Parameter substituiert werden, und y-Ersetzungen mit den x-Parametern aus WB_r frühestens in WB_{r+1} auftreten können, mithin A zu keinem anderen Atom in $WB_{s,s < r}$ wesentliche Formel sein kann.

iv) Nicht-simultane Schließung mit verschiedenen Endknoten A, B :



Bedingung § , wie in iii) vorausgesetzt!

$(-)A$ enthalte an k-ter Stelle den x-Parameter a . Die zu x verknüpfte y-Variable von B aus WB_k muß dann auf a spezialisiert worden sein. Zum k-ten x-Parameter c im Atom A des WB_k kann es dann keine entsprechende Ersetzung von y aus $-B$ von WB_j geben. Widerspruch zur Annahme, daß WB_k ge-

schlossen.

Angenommen die atomare Formel von $(-)B$ enthalte eine mit einer y -Variablen verknüpfte x -Variable. Dann gibt es zu B aus WB_k wiederum keine wesentliche Formel aus einem $WB_{s,s < k}$. $\square$

Ausblick. Mit einigem zusätzlichen, technischen Aufwand dürfte sich das Tableauealkül auch als Entscheidungsverfahren für die beiden rein pränexen Formelklassen " $\exists \forall \dots \forall$ " (= 'Ackermann') und " $\exists \exists \forall \dots \forall$ " (= 'Gödel-Kalmar-Schütte') erweisen. Und natürlich scheint die Untersuchung derjenigen Klassen vielversprechend, deren aussagenlogische Struktur stark eingeschränkt ist, wie z.B. der Klasse $(Or) \cap (0, \infty)$ bzw. $(Or) \cap (0, 1)$, für die der Entscheidbarkeitsstatus bislang offen ist.

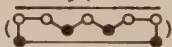
Anhang A. Komplexität entscheidbarer Formelklassen

In diesem Anhang vergleichen wir die Komplexitäten verschiedener Formelklassen, deren Schemata ein endliches Modell besitzen, falls sie überhaupt ein Modell haben. Die Beweise für diese Klassen finden sich in [Solvable], worauf auch die in eckigen Klammern stehenden Nummerierungen hinweisen. Die Notation stimmt mit der auf S. 5 überein: Allquantoren in metasprachlichen Formulierungen werden unterdrückt. q beliebiger Quantor aus $\{\forall, \exists\}$,  wie in Kap.2

Index r, s für max. Anzahl von y - (respektive x -) Quantoren.
 p Anzahl der Prädikatbuchstaben. m max. Stellenzahl in $|p_i|$.

allgemeine Bezeichnung / Kennzeichnung / Komplexität

Monadische Klasse [2.1]	$(\infty, 0)$	2^p
Ackermann [2.2]	$\forall y \exists x_1 \dots \exists x_s \cap (0, 1)$	$3s \cdot 2^p + 1$
Min. Gödel-Kalmár-Schütte Klasse [2.3]	$\forall y_1 \forall y_2 \exists x \cap (0, 1)$	$49 \cdot 2^{p \cdot 2^m} + 1$
Gödel-Kalmar-Schütte-Klasse [2.5]	$\forall y_1 \forall y_2 \exists \dots \exists_s$	$(49s(s+1)^2 \cdot 2^{p \cdot 2^m}) + 1$
$\exists$ -erweiterte Gödel-Kalmar-Schütte-Klasse [Initially extended = 2.5]	$\exists_1 \dots \exists_1 \forall \forall \exists \dots \exists_s$	$(49s(s+1+1)^2 \cdot 2^{p(2+1)^m} + 1+1)$

allgemeine Bezeichnung	/ Kennzeichnung	/ Komplexität
1. Basis eingeschränkte Skolem-Klasse [2.4]	$\forall \dots \forall_r \exists \dots \exists_r \cap$ $(Y_1, Y_2 \in b(F) \ \& \ Y_1 \neq Y_2 \rightarrow$ $ Y_1 > 1 \ \& \ Y_2 > 1)$ Es gibt höchstens eine Y-Menge mit mehr als einer y-Var. als Element	$(s(s+1)\kappa_r)^r \cdot 2^{p \cdot r^m} + 1$ $\kappa_r \leq (r^2 + r + 1)^{r+1}$
2. Basis-eingeschränkte Skolem-Klasse [2.6]	$\forall \dots \forall_r \exists \dots \exists_s$ 	$(s \cdot (s+1) \cdot \kappa_r)^r$ $2^{p \cdot r^m} + 1$
3. Basis-eingeschränkte Skolem-Klasse [2.7]	$\forall \dots \forall_r \exists \dots \exists_s$ $(Y[t]_{>1} \neq Y'[t]_{>1}$  "für alle x-Terme aus $D(F, \infty)$ und alle Y-Mengen Y & Y' in $b(F)$, falls $Y[t]$ und $Y'[t]$ verschiedene Term-mengen größer 1, dann darf kein Element aus Y erblich verknüpft sein mit einem Element aus Y' "	$t(2tr^4 + 1)^{r^2} + 1$ $t = s \cdot \kappa_r 2^{p(r+s)^m} + 1$
4. Basis-eingeschränkte Skolem-Klasse (Erweiterung von [2.7]) [6.1]	$\forall \dots \forall_r \exists \dots \exists_s \cap$ $(Y_1, Y_2 \in b(F) \ \&$ $1) \ Y[t]_{>1} \neq Y'[t]_{>1} \ \&$  $2) \text{ Es gibt keine y-Var., die } b(F) \text{ in Mengen } S_1 \ \& \ S_2 \text{ schneidet:}$ $Y_1 \in S_1 \ \& \ Y_1 \in S_2$	Komplexität wie [2.7]

allgemeine Bezeichnung/	Kennzeichnung	/	Komplexität
5. Basis-eingeschränkte Skolemklasse (Erweiterung von [6.1]) [6.2]	$\forall \dots \forall_r \exists \dots \exists_s q_w \dots q_w_t$ $(i, j \in \{1, \dots, t\}, i=j$ $b(F_{6.1}, U\{v, w_1, \dots, w_t\}$ $\{w_1\}, \dots, \{w_q\};$ $v \text{ Var. aus } F)$		Komplexität wie [2.7]
Basis-eingeschränkte Normal ($=\forall q \dots q \exists$) - Klasse [2.8]	$\forall q \dots q \exists \quad n$ $(x_k \in D(F, \infty), 1 < k < n,$ $Y \in b(F), y_1 \in Y \text{ be-}$ $\text{herrscht } x,$ $ Y[t] < 1, x_t \text{ erblich}$ $t-x_k \text{ verknüpft mit}$ $v:$ $1) \quad v \text{ beherrscht kei}$ $\text{ne } x, \text{ die irgend-}$ $\text{ein } y_i \in Y \text{ beherr-}$ schen $2) \quad \forall \{Y' \in b(F), \text{so daß}$ $ Y[t] < 1 \text{ \&}$ $Y'[t] \neq Y[t])$		$(t(2t(r+s-1)^4+1)(r+s-1)$ $t = n\kappa_{r+s-1}(2^p(r+s)^m$ $\kappa_r = ((r+s-1)^2 +$ $+ (r+s)+1)(r+s)+1$

Bemerkung. Alle Kennzeichnungen bez. Erfüllbarkeit!

Anhang B. Systematischer Tableau

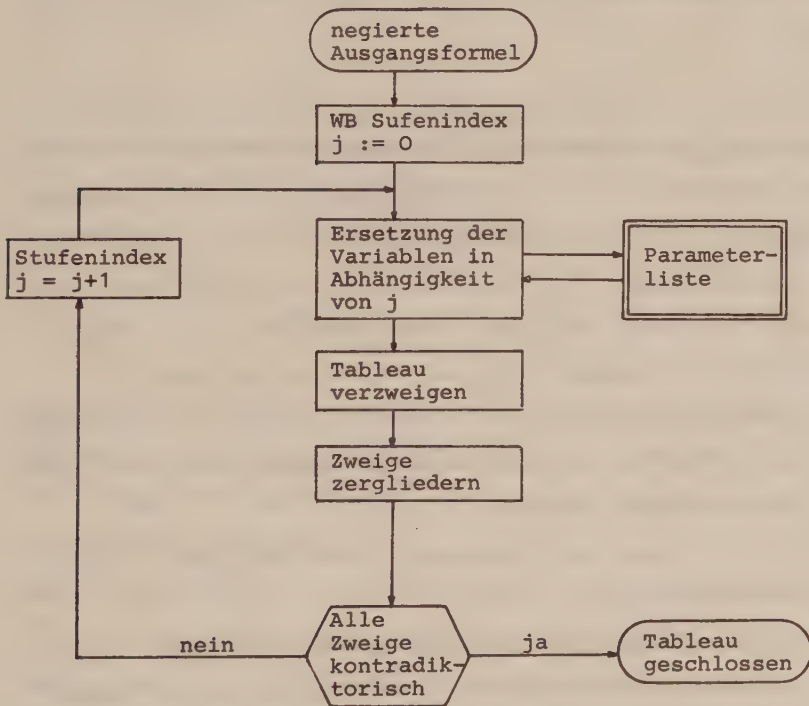
Wie bereits in Kap. 3 erwähnt, wird an einen offenen Ast (bzw. Zweig) jeweils der ganze Ursprungsbaum UB angehängt, jedoch mit anderen Spezialisierungen wie im UB. Die Reihenfolge der Spezialisierungen wird durch das Verfahren des systematischen Tableaus für Formeln mit pränexer, konjunktiv-normalförmiger Matrix¹ festgelegt:

O. Negieren der Ausgangsformel.

- 1.a. Für den UB: Zunächst erfolgen alle Ersetzungen der Variablen (in der Reihenfolge wie sie im Präfix auftreten) nach δ - und γ -Regel, wobei die Wahl der Parameter nach einer noch zu definierenden Liste erfolgt.
- 1.b. Für jeden weiteren WB: Alle existenzquantifizierten x-Variablen werden durch gänzlich neue, noch nicht im Tableau vorher aufgetretene Parameter ersetzt. Die allquantifizierten y-Variablen werden nach einer erweiterten Parameterliste erstellt, die die in früheren WBen hinzugekommenen neuen Parameter berücksichtigt.
2. Dann wird das Tableau von "links nach rechts" verzweigt (Linksbündigkeit der Adjunktionskette) in sog. Zweige $Z^1, \dots, Z^n$.

1 Entsprechend mit Vertauschung von 2) und 3) für adjunktiv-normalförmige Matrix.

3. Jeder Zweig Z_j^i (j heißt Stufe) von links nach rechts wird zergliedert, bis keine komplexe Formel (= Konjunktion) in Z_j^i mehr vorhanden ist. Tritt in allen Zweigen der Stufe j eine Kontradiktion auf, so bricht das Verfahren ab, andernfalls
4. wird an jeden offenen Zweig das ganze Tableau angehängt und wieder der Reihe nach von 1.b ab verfahren.



Definition: Eine Menge für die Schließung eines Astes wesentlicher Formeln sei eine Menge von atomaren Formeln, die alle das gleiche Prädikat besitzen und unter denen mindestens eine negierte und eine unnegierte Formel auftritt.

Wesentliche Atome A , $\neg A$ einer Ausgangsformel F können demnach nur Ersetzungen von zwei bestimmten wesentlichen Formeln sein.

Parameterliste. Ausschlaggebend für das schnelle Terminieren eines Tableaus $T(F)$ ist das Zusammenspiel der verschiedenen Ersetzungen für y -Variablen von $\bar{F}$ im Tableau (= x -Variablen der Ausgangsformel F). Die Wahl der Parameter für die betreffenden y -Variablen soll nach einer Parameterliste erfolgen, die nach den folgenden Bedingungen konstruiert wird:

I) Existiert ein Tableau $T(F)$ für F , das im UB geschlossen ist, so sollte mit den Parametern unserer Liste eben dieses Tableau erzeugt werden.

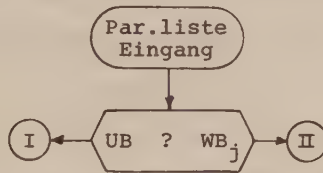
(Für den Beweis der 2-atomigen Klasse benötigen wir nur diese Bedingung.)

II) Von allen denkbaren Permutationen der x -Parameter für y -Variablen sollten möglichst viele von denjenigen ausgesondert werden, die "nichts zur Schließung beitragen".

(Das wird mit einer groben Selektion erreicht.)

Wir erklären unser systematisches Vorgehen an Hand eines Flußdiagramms und zeigen zugleich, daß das systematische Tableau auch den beiden Bedingungen genügt. Da die Konstruktion der Parameterliste nicht zur Erstellung eines lauffähigen Programms dienen soll, sondern lediglich zum Nachweis, daß ein solches Programm auch tatsächlich erstellt werden kann, bleiben die meisten Anweisungen des Flußdiagramms, soweit sie sich ohne Schwierigkeiten entwickeln lassen, etwas knapp gehalten in der Beschreibung.

Zunächst unterscheiden wir zwischen Parameterersetzung innerhalb des UBes und P'ersetzung in anderen WBen:



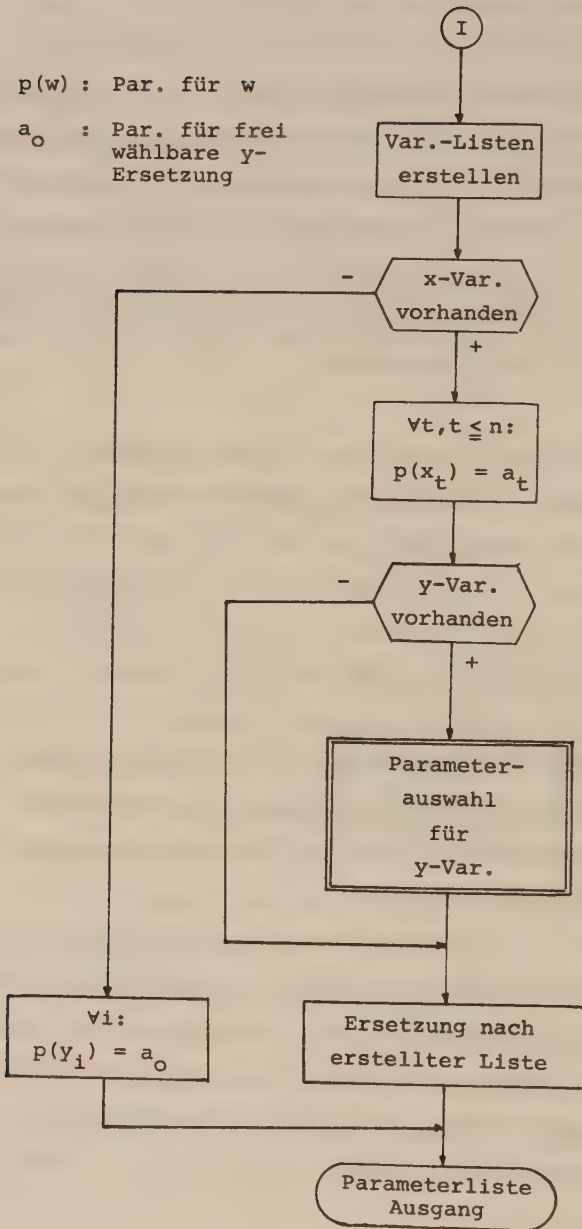
I) (vgl. im folgenden das Diagramm auf der nächsten Seite.)

Die Matrix der Ausgangsformel sei konjunktiv-normalförmig - für adjunktiv-normalförmige Matrizen läßt sich ein analoges Verfahren konstruieren.

Dann lassen sich die atomaren Formeln in sog. Klausen anordnen, d.h. jede Klausen entspricht dabei einem Konj.-glied der Ausgangsmatrix. Alle atomaren Formeln der Klausen, die nicht wesentlich sind, werden eliminiert. Das hat zur Folge, daß gegebenenfalls auftretende, für die Schließung unnötige Variablen nicht berücksichtigt werden. Die restlichen n x-Variab-

$p(w)$: Par. für w

a_0 : Par. für frei
wählbare y -
Ersetzung



blen und m y -Variablen listet man dann in zweifacher Weise auf: a) Folge aller Folgen der miteinander korrelierten Variablen, d.h. aller y -Variablen (in der Reihenfolge ihres Auftretens im Präfix), die mit einer x -Variable im transitiven Abschluß der Verknüpfungsrelation stehen. Dabei muß die x -Var. nicht von einer y -Var. beherrscht sein. Außerdem kann eine y -Var. in mehreren Korrelationslisten auftreten (dann ist eine x -Var. mit einer anderen korreliert). [a) wird benötigt, um die Anzahl der Ersetzungen von mehrfach verknüpften Variablen zu verringern.]

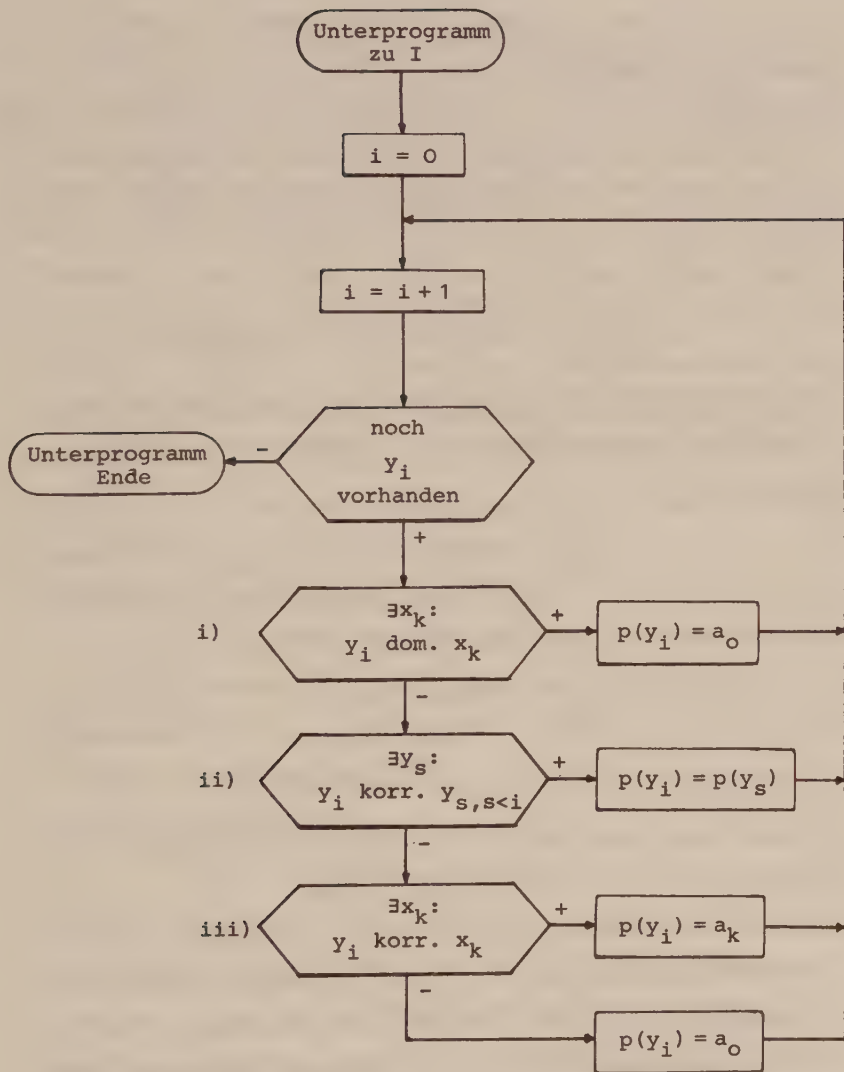
b) Folge aller Folgen derjenigen Variablen, die in einem wesentlichen Formelpaar auftreten [b) wird benötigt, um die Ersetzungen in mehrstelligen Prädikaten zu regeln.]

Treten in einer Klausel mehrere wesentliche Formelpaare $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ auf, so wollen wir in der Klausenliste die Variablen von α_k vor denen von α_s rangieren lassen, falls die Variablen von α_s mit weniger Variablen anderer Klausen korreliert sind als diejenigen von α_k . Andernfalls könnte eine mögliche Ersetzung auf UB-Stufe wegen unnötiger Substitutionen unterlaufen werden (z.B.: Klausen: $(Py, -Px_1, Qy, -Qx_2), (Ry, -Rx_2)$; Parameter für x_1, x_2 : a_1, a_2 . Dann wird y auf a_2 spezialisiert und nicht auf a_1). Die jeweils erstgenannten wesentlichen Formelpaare nennen wir die ausgezeichneten wesentlichen Formelpaare. Für die folgende Konstruktion eines systematischen Tableaus ist nur von Bedeutung, daß die Listen a), b) prinzipiell erstellbar sind.

Enthält $\bar{F}$ nun überhaupt keine x-Variablen, so werden alle y-Variablen auf den Parameter a_0 spezialisiert, und das Unterprogramm ist bearbeitet. Andernfalls ordnen wir den x-Variablen $x_1, \dots, x_n$ die Parameter $a_1, \dots, a_n$ zu. Sind keine y-Variablen vorhanden, so ist das Programm ebenfalls beendet. Andernfalls wird nach dem in einem weiteren Diagramm verdeutlichten Verfahren eine Liste der y-Parameter erstellt.
(→ nächste Seite).

In diesem Verfahren werden, soweit möglich, y-Var. auf x-Par. der zu y korrelierten (= im transitiven Abschluß der Verknüpfung stehenden) x-Var. spezialisiert (= iii). - Treten mehrere y-korrelierte x-Var. auf, so soll die, in unserer Korrelationsliste zu erst genannte x-Var. genommen werden, da in diesem Fall eine kontradiktorische Ersetzung der betreffenden wesentlichen Formeln auf UB-Stufe sowieso nicht möglich ist. i): Beherrscht eine y-Var. eine x-Var., so wird die y-Var. durch den für frei wählbare y-Ersetzung reservierten Parameter a_0 (= +) ersetzt. - Keine kontradiktorische Ersetzung auf UB-Stufe möglich. ii): Untereinander korrelierte y-Var. werden gleich ersetzt.

Falls keiner der Fälle i)-iii) zutrifft, so ist y offensichtlich nur mit sich selbst korreliert und kann durch a_0 ersetzt werden.



$p(w)$: Par. für w

a_0 : Par. für frei wählbare y -Ersetzung

$v \text{ dom. } w$: v steht im transitiven Abschluß der Beherrschungsrelation

$v \text{ korr. } w$: v steht im transitiven Abschluß der Verknüpfungsrelation

Es ist nun leicht zu zeigen, daß Programmteil I auch die Bedingung I) erfüllt:

Angenommen $T(F)$ für F ist geschlossen. Dann kann $T(F)$ nicht auf der UB-Stufe geschlossen sein, falls für korrelierte Variablen x_k, x_s, y der ausgezeichneten wesentlichen Formeln gilt:

- a) x_k korreliert mit $x_s, s \neq k$
- b) x korreliert mit y & y beherrscht x

Also bleiben noch zwei Fälle übrig, in denen eine kontradiktorische Ersetzung wesentlicher Formeln auf UB-Stufe möglich ist:

$$1) \begin{array}{ccc} \dots, y_s, \dots & \text{bzw.} & \dots, y_s, \dots, \overbrace{y_r, \dots}^{} \dots \dots \dots \overbrace{y_{n-1}, \dots}^{\phantom{y_{n-1}, \dots}} \\ \dots, y_k, \dots & & \dots, y_k, \dots, \overbrace{y_k, \dots}^{} \dots \dots \dots \overbrace{y_n, \dots}^{} \end{array};$$

$s, k, r, \dots, n$ nicht notwendig verschieden.

$$2) \begin{array}{ccc} \dots, x_k, \dots & \text{bzw.} & \dots, x_k, \dots, \overbrace{y_r, \dots}^{} \dots \dots \dots \overbrace{y_{n-1}, \dots}^{\phantom{y_{n-1}, \dots}} \\ \dots, y, \dots & & \dots, y_q, \dots, \overbrace{y_q, \dots}^{} \dots \dots \dots \overbrace{y_n, \dots}^{} \end{array};$$

wobei x nicht von y (y_n) beherrscht wird.

Korrelationen zwischen Variablen verschiedener wesentlicher Formeln sind dabei nicht ausgeschlossen!

Nach ii) vom Programmteil I wird die sofortige (kontradiktorische) Ersetzung von 1), nach i) und ii) diejenige von 2) gewährleistet. Damit ist aber auch das Tableau $ST(F)$ auf der UB-Stufe geschlossen, falls überhaupt eine solche Schließung möglich ist.

II) Eine starke Verkürzung der Beweise wird durch eine sorgfältige Auswahl derjenigen Parameter für y-Var. möglich, die eine x-Var. beherrschen oder in Korrelation mit dieser x-Var. stehen. Wollte man eine optimale Wahl für jede beliebige Formel erreichen, so müßte man die der Formel zu Grunde liegende aussagenlogische Struktur, wie auch die Variablenbindungen und Verknüpfungen der Variablen untereinander bis ins Detail festlegen. Dies wollen wir lediglich in Annäherung tun, da uns nur die prinzipielle Lösung eines Beweisverkürzungsmechanismus interessiert. Die Verkürzung wird erreicht durch zwei Ersetzungsvereinbarungen, die die Verfahrensweise eines Menschen kopiert, der ein Tableau per Hand ausrechnet.

a) Berücksichtigung beherrschter x-Var.:

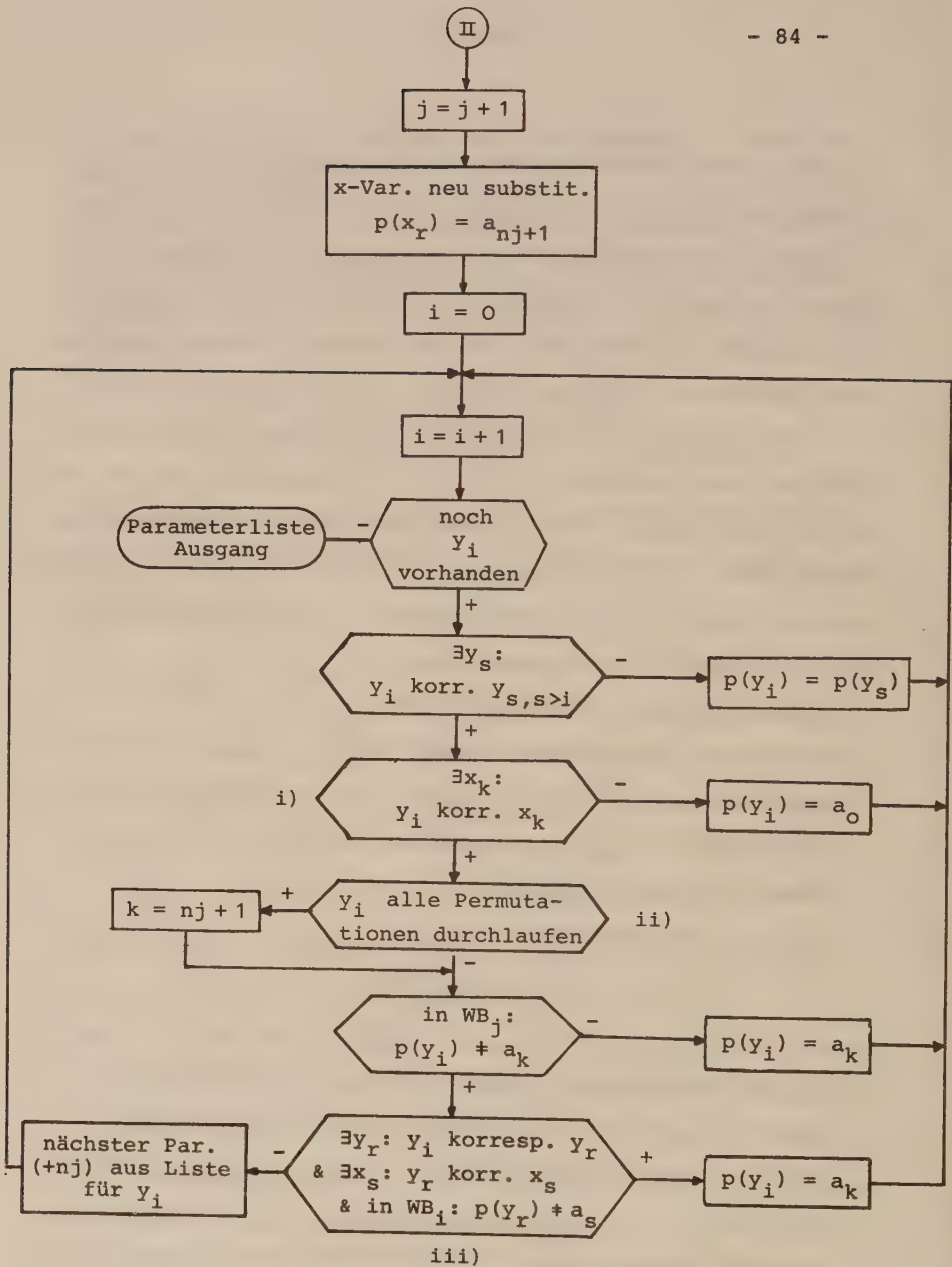
Eine y-Var. y_i , die eine x-Var. $x_k, k < 1$ beherrscht und mit dieser korreliert ist, wird, wenn sie noch nicht im WB_i auf den Parameter a_{nj+1} spezialisiert wurde, im WB_{j+1} durch diesen Parameter ersetzt.

[z.B.: y beherrscht x

$$\begin{array}{ccccccc} \bar{F} & & UB & & WB_1 & & \\ \hline Py & \rightarrow & Pa & \rightarrow & Pb & \rightarrow & \\ -Px & & -Pb & & -Pc & &] \end{array}$$

b) Berücksichtigung der Mehrstelligkeit von Prädikaten:

Konnte a) auf der $j+1$. WB-Stufe durchgeführt werden, so wird y_i nochmals durch diesen Parameter (a_{nj+k}) ersetzt, vorausgesetzt, y_i korrespondiert mit y_r , d.h. y_i und y_r treten an verschiedenen Prädikatstellen eines wesentlichen Formelpaares auf (ohne miteinander korreliert zu sein) und



v korresp. w : v, w treten an verschiedenen Prädikatstellen eines wesentlichen Formelpaares auf, ohne miteinander korreliert zu sein

Übrige Bezeichnung wie im letzten Diagramm!

y_r ist korreliert mit einem x_s , wobei y_r noch nicht auf a_{nj+s} spezialisiert wurde im WB_j (d.h. y_r beherrscht x_s).

[z.B.: $\begin{array}{ccc} \bar{F} & & UB \\ \hline Py_1y_2 & \rightarrow & Paa \\ -Px_1x_2 & & -Pab \\ & & \rightarrow \\ & & Pab \\ & & -Pcd \end{array} \quad]$

Bemerkung zum Diagramm. a) und b) werden durch i) und iii) repräsentiert. ii) regelt den Übergang von einer Expansion $E_T(F,p)$ zur nächsten $E_T(F,p+1)$, wobei berücksichtigt sein soll, daß y-Var. die nicht mit einer x-Var. korreliert sind und deshalb stets durch a_0 ersetzt werden, von der Permutation ausgenommen sind.

Unser systematisches Verfahren garantiert, daß jede Allspezialisierung von Bedeutung vorrangig bearbeitet wird, andererseits viele überflüssige vermieden werden. Außerdem wird klar geworden sein, wie unvorteilhaft der Tableauealkül für Zwecke des theorem-proving einzuschätzen ist. Nachteilig bei allen Tableauverfahren ist der übermäßig große Speicherplatzbedarf (space-complexity), dessen Einschränkung die Übersichtlichkeit beweistheoretischer Überlegungen stark vermindert.¹

¹ Ein spezieller Kalkül (connection calculus), der mit minimalem Speicherplatz auskommt, findet sich in [Bibel, 1983]

Bibliographie

Viele der in Kap. 2 notierten Arbeiten wurden zusammengefaßt und teilweise auch in neuer Form dargestellt in den beiden Monographien [Lewis, 1979] = [Unsolvable] und [Dreben & Goldfarb, 1979] = [Solvable]. Eine ausführliche Bibliographie zum Entscheidungsproblem der reinen Prädikatenlogik findet sich dort.

Die folgende Liste enthält nur solche Arbeiten, auf die vorher durch Nennung ihres Titels oder in anderer Weise Bezug genommen wurde.

Aanderaa, S.O.

- (1966) A new undecidable problem with applications in logic, Ph. D. Thesis, Harvard University
- (1971) On the decision problem for formulas in which all disjunctions are binary, Proc. 2nd Scand. Logic Symp., J.E. Fenstad (ed.), North-Holland Publ. Comp., Amsterdam, 1-18.

Aanderaa, S.O. & Lewis, H.R.

- (1973) Prefix classes of Krom formulas, J.S.L. 38:4, 628-642.

Barwise, J.

- (1977) An introduction to first order logic, Barwise (ed.), handbook of mathematical logic, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam, 5-46.

Behmann, H.

- (1922) Beiträge zur Algebra der Logik, insbesondere zum Entscheidungsproblem, Math. Annalen 86:163-229.

Bernays, P. & Schönfinkel, M.

- (1928) Zum Entscheidungsproblem der math. Logik, Math. Annalen 99:342-372.

Bibel, W.

- (1983) Automated theorem proving, Vieweg Verlag, Braunschweig.

Chang, C.C. & Keisler, H.J.

- (1962) An improved prenex normal form, J.S.L. 27:317-326.

Chang, C.C. & Lee, R.C.T.

- (1973) Symbolic logic and mechanical theorem proving, Academic Press, New York.

Church, A.

- (1936) A note on the Entscheidungsproblem, J.S.L. 1:40-41, correction: J.S.L. 1:101-102.

Cook, S.

- (1971) The complexity of theorem-proving procedures, Proc. Third A.C.M. Symposium on Theory of Computation, 151-158.

Cook, S. & Reckhow, R.

- (1979) On the lengths of proofs in the propositional calculus, Proc. Sixth A.C.M. Symposium on Theory of Computation, 135-148.

Davis, M. & Putnam, H.

- (1960) A computing procedure for quantification theory, J. of A.C.M. 7:201-215.

Denton, J.

- (1963) Applications of the Herbrand Theorem, Ph. D. thesis, Harvard University.

Dreben, B., Kahr, A.S. & Wang, H.

- (1962) Classification of AEA formulas by letter atoms, Bulletin of the American Mathematical Society 68: 528-532.

Dreben, B., Andrews, P. & Aanderaa, S.

- (1963) False lemmas in Herbrand, Bulletin of the American Mathematical Society 69:699-706.

Dreben, B. & Goldfarb, W.D.

- (1979) The decision problem. Solvable classes of quantificational formulas, Add.-Wesley Publ. Comp., Inc., London.

Friedman, J.

- (1963) A semi-decision procedure for the functional calculus, J. of A.C.M. 10/1:1-24.

Gladstone, M.D.

- (1966) Finite models for inequations, J.S.L. 31:581-592.

Gödel, K.

- (1931) Über formal unentscheidbare Sätze der Prinzipia Mathematica und verwandter Systeme, Monatshefte für Mathematik und Physik 38:173-198.
- (1932) Ein Spezialfall der Entscheidungsproblems der theoretischen Logik, Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums 2:27-28.

Goldfarb, W.D.

- (1974) On the decision problems for quantification theory, Ph. D. thesis, Harvard University.

Goldfarb, W.D. & Lewis, H.

- (1981) On Gödel class with Identity, J.S.L. 46:354-364.

Gurevich, Y.

- (1966a) Problema razresheniya dlya yzkogo ischisleniya predikatov, Doklady Akademii Nauk SSSR 168:510-511, Englische Übersetzung in Soviet Mathematics Doklady 168:669-670.
- (1966b) Ob errekktivnom raspoznavanii vipolnimosti formul UIP, Algebra i Logika 5:25-55.
- (1969) The decision problem for the logic of predicates and operations, Algebra and Logic 8:160-174.
- (1976) The decision problem for standard classes, J.S.L. 41:460-464.

Herbrand, J.

- (1930) Recherches sur la Théorie de la démonstration, thesis, University of Paris, Englische Übersetzung in Herbrand 1971.
- (1931) Sur le problème fondamental de la logique mathématique, Englische Übersetzung in Herbrand 1971.
- (1971) Logical writings, Goldfarb, W.D. (ed.), Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts.

Hermes, H.

- (1970) Entscheidungsproblem und Dominospiele, Heidelberg Taschenbücher, Selecta Mathematica II, Springer Verlag.
- (1971) A simplified proof for the unsolvability of the $\forall\exists\forall$ -case, Gandy (ed.) Logic Colloquium '69, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam-London.

Horn, A.

- (1951) On sentences which are true of direct unions of Algebras, J.S.L. 16/1:14-21.

Joyner, W.H. jr.

- (1976) Resolution strategies as decision procedures, J. of A.C.M. 23:398-417.

Kahr, A.S.

- (1962) Improved reductions of the Entscheidungsproblem to subclasses of AEA formulas, Proceedings of a Symposium on the Mathematical Theory of Automata, Brooklyn Polytechnic Institute, New York.

Kahr, A.S., Moore, E.F. & Wang, H.

- (1961) Entscheidungsproblem reduced to the $\forall\exists\forall$ -case, Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA 48:365-377, (1962).

Kalmár, L.

- (1933) Über die Erfüllbarkeit derjenigen Zähl ausdrücke, welche in der Normalform zwei benachbarte Allzeichen enthalten, Math. Annalen 108:466-484.

- (1936) Zurückführung des Entscheidungsproblems auf den Fall von Formeln mit einer einzigen, binären Funktionsvariablen, *Compositio Mathematica* 4: 137-144.
- Kalmár, L. & Surányi, J.
- (1947) On the reduction of the decision problem, second paper: Gödel prefix, a single binary predicate, *J.S.L.* 12:65-73.
- (1950) On the reduction of the decision problem, third paper: Peppis prefix, a single binary predicate, *J.S.L.* 15:161-173.
- Kostyko, V.F.
- (1962) On a case of the decision problem in the restricted predicate calculus, *Uspekhi Mat. Nauk* 17(106):213.
- (1964) Klass cvedeniya $\forall\exists^n\forall$, *Algebra i Logika* 3:45-65.
- Krom, M.R.
- (1970) The decision problem for formulas in prenex conjunctive normal form with binary disjunctions, *J.S.L.* 35:210-216.
- Lewis, H.R.
- (1974) Herbrand expansions and reductions of the decision problem, Ph. D. thesis, Harvard University, Cambridge, Mass., bzw: Center for Research in Computing Technology, Technical Report No TR-18-74.
- (1979) Unsolvability classes of quantificational formulas, *Add.-Wesley Publ. Comp., Inc., Reading, Mass.*
- Lewis, H.R. & Goldfarb, W.D.
- (1973) The decision problem for formulas with a small number of atomic subformulas, *J.S.L.* 38:471-480.
- Löwenheim, L.
- (1915) Über Möglichkeiten im Relativkalkül, *Math. Annalen* 76:447-470.
- Maslow, S.Y.
- (1964) An inverse method of establishing deducibilities in the classical predicate calculus, *Soviet Math. Doklady* 5:1420-1424.
- (1967) An inverse method for establishing deducibilities of nonprenex formulas of the predicate calculus, *Soviet Math. Doklady* 8/1:16-19.
- Orevkov, V.P.
- (1968) Two undecidable classes of formulas in classical predicate calculus, *Seminars in Math, V.A. Steklov Inst. Leningrad* 16:98-102.

Rabin, M.O.

- (1969) Decidability of second order theories and automata on infinite trees, *Translations of the American Mathematical Society* 141:1-35.

Robinson, J.A.

- (1979) *Logic: form and function*, University Press, Edinburgh.

Schütte, K.

- (1934) Untersuchungen zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik, *Math. Annalen* 109:572-603.

Shelah, S.

- (1977) Decidability of a portion of the predicate calculus, *Israel J. Math.* 28:32-44.

Shoenfield, J.R.

- (1967) *Mathematical logic*, Add.-Wesley Publ. Comp., Inc., Reading, Mass.

Skolem, T.

- (1919) Untersuchungen über die Axiome des Klassenkalküls und über Produktions- und Summationsprobleme, welche gewisse Klassen von Aussagen betreffen, *Videnskapsselskapets Skrifter I, Matematisk-naturvidenskabelig klasse*, no. 3.
- (1928) Über die mathematische Logik, *Norsk matematisk tidsskrift* 10:125-142.

Smullyan, R.M.

- (1971) *First-Order Logic*, Springer Verlag, New York.

Surányi, J.

- (1950) Contributions to the reduction theory of the decision problem, *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* 1:261-270.
- (1959) Reduktionstheorie des Entscheidungsproblems im Prädikatenkalkül der ersten Stufe, *Verlag der Ungarischen Akademie der Wissenschaften*, Budapest.

Toledo, S.

- (1975) Tableau systems for first order number theory and certain higher order theories, *lecture notes in mathematics* 447, Dold & Eckmann (ed.), Springer Verlag, Berlin.

Turing, A.M.

- (1937) On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem, *Proc. of the London Math. Soc.* 42:230-265 (1936), Korrektur: 43:544-546 (1937).

Wirsing, M.

- (1976) Das Entscheidungsproblem der Prädikatenlogik
1. Stufe mit Identität und Funktionszeichen in
Herbrandformeln, Dissertation Universität München.

Wos, L.

- (1981) Solving open questions with an Automated Theorem
-Proving program, Argonne National Laboratory,
Argonne, Illinois 60439.



L E B E N S L A U F

Am 6.11.1952 wurde ich, Stephan Bayerl, als zweites Kind von Dr. Franz X. Bayerl und seiner Frau Winnie in Augsburg geboren. Nach dem Besuch der Volksschule und des Gymnasiums (Realgymnasium Augsburg / Musisches Gymnasium Niederaltaich) studierte ich an der Münchener Universität zunächst Philosophie, Theaterwissenschaft und Mathematik, ab dem dritten Semester Philosophie und Logik, später als Nebenfach noch Astrophysik.

Unter anderem besuchte ich Vorlesungen und Seminare in Logik und Wissenschaftstheorie bei den Dozenten U. Blau, W. Stegmüller, M. Drömmer (Käsbauer), G. Link, A. Kamlah und M. Varga v. Kibed, Philosophie bei den Professoren W. Rödl, M. Drömmer und W. Stegmüller, Astrophysik bei den Dozenten P. Wellmann, R. Kippenhahn, H.-G. Groth und G. Börner. Außerdem hörte ich Vorlesungen in Mathematik (F. Kasch B. Pareigis, H.J. Schneider, K. Schütte), in Linguistik (J. Altmann), Anthropologie und Humangenetik (F. Schwarzfischer, H. Cleve, G. Ziegelmayer) und in Physik (W. Rollwagen, R. Sizmann, W. Waidelich und J. Ehlers).

Vom 1.4.1984 bis zum 31.10.1985 war ich beschäftigt als wissenschaftlicher Assistent am Seminar für Philosophie, Logik und Wissenschaftstheorie, Universität München.

Seit dem Herbst 1985 bin ich Lehrbeauftragter für "Logische Grundlagen der Linguistik und Artificial Intelligence" an der Philosophischen Fakultät der Münchener Universität.

Vom 1. 11. 84 an, während ich noch als Assistent angestellt war, wurde ich Mitglied der Forschungsgruppe "Intellektik" an der Technischen Universität München und arbeite dort als Wissenschaftler, seit dem Herbst 85 als Leiter des europäischen Forschungsprojektes ESPRIT 415 F (Highly parallel inference machine).

